「リーマン多様体」とは何か

宮下英明 著

Ver. 2018-03-12

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「リーマン多様体」とは何か

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『「リーマン多様体」とは何か』を PDF 文書の形に改めたものです。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

「リーマン多様体」とは何か

0　本テクストの趣旨

0.1 「リーマン多様体」の思想を知る

井の中の蛙は，「井」を知ることができるか。
これは，「*井の中の蛙は，己をわかることができるか*」という問題でもある。

己をわかろうとする者は，思想に向かう。
実際，己をわかろうとする思考タイプの括りが，「思想」である。
そして，自分を「井の中の蛙」に見立てる者は，「井」を知ろうとする思想――方法論――に惹かれることになる。

井の中の蛙が「井」を知る方法論は，「手探り」――空間を内から手探りする――である。
これしか無いという意味で，これが方法論である。

数学でこの方法論を明示的に主題化しているものに，「リーマン多様体」がある。
これは，「手探り」の数学である。

「手探り」とは，＜記憶＞に留めながら「手探り」の点をシフトしていく作業である。
そして，空間を構造化しようとするこの作業は，空間を「多様体」に構造化していることになる。

しかもこれは，点ごとに＜記憶＞を設けるタイプの多様体。
これが，「リーマン多様体」である。
こうして，井の中の蛙は，「リーマン多様体」を自らの必修科目に定めることになる。

0.2 『相対性理論』へ

「リーマン多様体」は，『相対性理論』によって光が当てられる。
『相対性理論』によって意味が与えられる。
「リーマン多様体」の学習に向かう者は，このことを知っている者である。

数学は，形式論を装う。
数学をつくる者は，意味を形式にする。
同時に，もとにした意味を隠蔽する。
なぜこのようなことをするかというと，この方法にメリットがあるからである。

しかし，この方法論は，数学の学習者を困惑・混乱させる。
そして，なによりまずいことに，彼らは《「意味」の考えを捨てる》という方向で，数学学習に適応する者になる。
アブストラクト・ナンセンスをゲームする者，このゲームで自足する者になるのである。

「リーマン多様体」の数学テクストは，この体(てい)である。
それらは，「無用の長物(ちょうぶつ)」ということを知らない体である。

「リーマン多様体」の学習は，無用の長物への展開に付き合わないことが要諦である。
「*無用の長物への展開に付き合わない*」は何についても言えることであるが，「リーマン多様体」の場合はとりわけそうである。
「リーマン多様体」は「内からの空間の手探り」の主題化なので，「無用の長物」の度合いがハンパ無いものになるのである。

どのあたりから「無用の長物」になってくるか。
「曲率」などは，もう「無用の長物」である。
ということは，ずいぶんはやい段階で，しかも核心的な主題で，「無用の長物」になってくるということである。

そこで，「*リーマン多様体論との付き合い方は？*」となるわけである。
リーマン多様体論が生業になっている者を別にすれば，つぎの２つを得たらすみやかに『相対性理論』に向かうのがよい：

1. 「リーマン多様体」の方法論
2. リーマン多様体の核心主題のエッセンス

0.3　数学テクスト批判

数学のテクストは，ほとんどが酷いものである。
「リーマン多様体/幾何学」のテクストの場合だと，例外なく酷い。

酷いテクストは，数学の不幸である。
＜わかったふり＞を，互いに強いられるからである。

数学の学習は，＜わからない＞から始まる。
教授は，＜わからない＞を＜わかる＞に導くものでなければならない。
しかし，酷いテクストが＜わからない＞を導く先は，＜わかったふり＞である。

酷いテクストが許されてしまうのには，数学の方法論にも原因がある。
数学は，形式主義・規約主義を立場にする。
これは，統辞論 syntax をやることになる。
＜わからない＞は，意味論 semantics である。
数学は，意味論の疑問に対しては「*好きに考えよ*」の構えをとる。

この構えの前に，意味論の疑問は沈黙させられる。
理論の意味を考えたことがあるのは，理論を創った者だけである。
後から来た者は，考えない。

意味を考えない数学学習は，表層的な辻褄合わせに終始する。
そして，表層的な辻褄合わせができることを，＜わかる＞にする。
数学のテクストは，ごく僅かの例外を除き，表層的な辻褄合わせを数学にしているテクストばかりになる。
「リーマン多様体/幾何学」のテクストは，例外なく，表層的な辻褄合わせを数学にしているテクストばかりである。

ところで，「リーマン多様体」の論述は，循環論法になるしかない。
「所与」設定を一度にしようとすると，それだけで理論全体になってしまう。
したがって，本来は「所与」に属することを小出しにしていく。
そしてこれは，循環論法の体(てい)になる。

学習者は，このスタイルにすっかり参ってしまう。
五里霧中に落ちてしまうのである。
しかし，「リーマン多様体」の循環論法は，問われることがない。
「リーマン多様体」が構成レベルの高い理論なので，循環論法が見えにくく，ごまかされてしまうのである。

学習者は，わからないのを自分のせいにする。
教授者の方はといえば，わかっていないのにわかっているふりをして，学習者の疑問に対してはトンチンカンな答えを返すばかりである。
学習者は，このトンチンカンな答えを理解しようとする。
そして，わからないのを自分のせいにするか，受けとめた風をポーズするかのいずれかになる。

尤もこれは，人の性(さが)といったものでもある。
ひとは，権威主義が身に染みついているので，＜わかっている者＞の存在を自分で勝手に立てて，わからないのを自分のせいにするのである。

学習者は，自分で勝手に落ち込まないために，つぎのことを知るべし。
教授者は，＜わかっている者＞だから教授しているのではない。
＜教授を役割とする者＞だから教授しているだけである。
教授者は，わかっているふりをするのが務めである。
したがって，学習者からの質問に対しては，それがトンチンカンな答えでも，答えねばならないのである。
実際，教授者は，学生の延長である。

こういうわけで，わかったふりをしない「リーマン多様体」のテクストをつくってみることにした。
「リーマン多様体」の意味論的テクストというわけである。

Ⅰ　探査

1　空間探査

1.1　主題：「現空間」

1.1.1「現空間」の主題化

現空間の形を主題にしようとする。
これは，途方もない企てになる。
形は，外から見えるものだからである。

内と外を隔てるものが壁のように存在しているのなら，それを内側からまさぐることで外形を予想することができる。
しかし，われわれの空間は，そんなふうではない。

それでも無理矢理やってみようとする。
当てにするのは，想像力と推理力である。

1.1.2 「リーマン多様体」

現空間の形を主題化する。
現空間の形を主題化しようとするのは，それが見えないからである。
見えないのは，わたしが現空間の<内>にいるためである。

見えないものをどう主題化するのか。
わからない。
手掛かりをつかむための探査から開始するのみ。

見えないものの探査は，「手探り」がこれの形になる。
現空間の探査は，空間の中での「手探り」である。

数学にこれを方法論にした空間論を求めると，「リーマン多様体」に当たる。

「リーマン多様体」は，他の多様体論ないし幾何学と何が違ってくるのか。
空間論は，わたしを空間の内に措くか外に措くかで，思考様式——空間を構造化する方法——が違ってくる。
「リーマン多様体」は，前者になる。
——「ふつう」は，後者である。

ただし，「手探り」は，これによって外形が見えるようになるというものではない。
「手探り」は，外形が演繹されてくる論理体系ではない。

1.2　空間探査旅行

1.2.1　空間探査の旅──＜いま・ここ＞の記録と解析

わたしは，わたしの存在の意味を知りたいと思う者である。
そこでわたしは，わたしが存在している空間を知ろうとする者である。
わたしが概念化しているその空間を，S と呼ぶ。

わたしは，S の探査を行動する。

この「探査」は，探査の旅である。
旅は，わたしの＜いま・ここ＞が逐次変わることである。
「探査」の旅は，日誌をつくる旅である。
わたしは，移り変わる＜いま・ここ＞を，逐次記録していく。

「探査」は，空間 S の中の放浪である。
わたしが S を放浪するのは，＜いま・ここ＞の変化を現すためである。
＜いま・ここ＞の変化の様から，反照的に S を現そうというのである。
──対象は，こちらがアクションする分しか，形を現してくれない。

＜いま・ここ＞が変わるとは，居場所 $P \in S$ が変わるということである。
そこで，＜いま・ここ＞の記録を，居場所 P の記録──ϕ_P ──と定める。

記録の蓄積── 記録帳 $\phi = \{\phi_P\}$ ──は，これに続く解析作業のためのものである。
記録をデータとして，＜いま・ここ＞がどんな運動をしてきているのかを解析する。
ここで考えていることは，つぎのことである：

《＜いま・ここ＞の運動の解析から，
反照的に空間 S の構造・ダイナミクスが知られる》

これが，空間探査の方法論である。

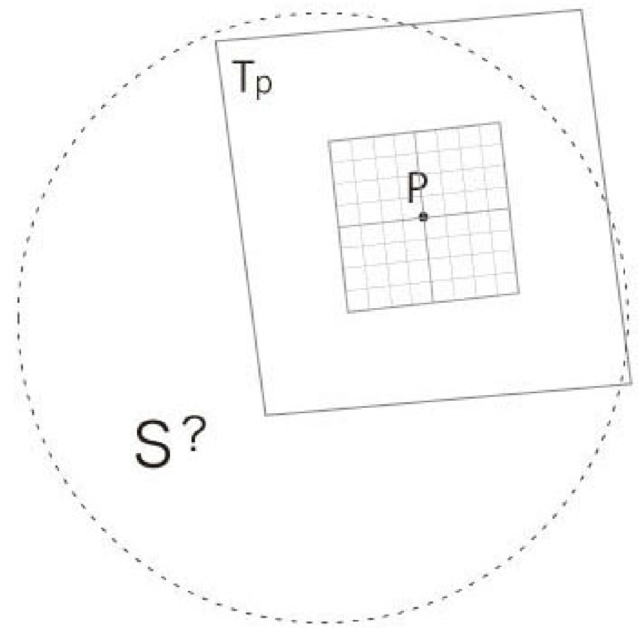
こうして「空間探査」は，日記をつけ，その日記帳をデータとして，＜いま・ここ＞がどんな運動をしてきているのかを解析することが，これの内容である。

1.2.2　地図の作成

＜いま・ここ＞の記録は，居場所 $P \in S$ の地図の作成として行う。

わたしは，点 P の近傍の地理を，つぎのように記録する：

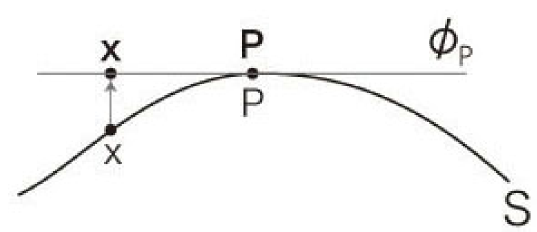
1. P における S の接平面 T_P を，同定する。
2. わたしには，前の地図作成場所から＜平行移動＞で運んできたデカルト座標 (正規直交座標) が有る。
   これをT_P の上に置き，原点と P を一致させる。



3. 投影の方法で，P の近傍地理を T_P に写し，これを地図とする。

投影の写像を，ϕ_P で表す。
また，作成された地図に対しても，ϕ_P で表すことにする。
（「ϕ_P」が写像と地図のどちらを指しているのかは，文脈から判断される。）

さらに，点 $x \in S$ に対する $\phi_P(x) \in \phi_P$ を，簡便のためゴシックの $\mathbf{x}$ で表す。



「地図作成」には，つぎのことが含意されている：

　　「わたしは，＜計量 metric 形式＞を持っている」

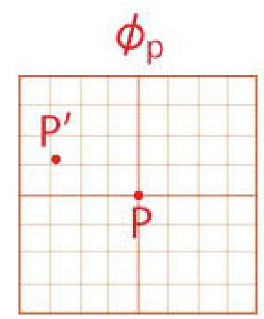
1.2.3　地図を接ぐ

「空間探査」は，つぎのことをしようとする：

　　空間 S の中を移動し，
　　移り変わる＜いま・ここ＞を，移り変わる居場所 $P \in S$ の地図 ϕ_P として，逐次記録し，
　　記録帳 $\phi = \{\phi_P\}$ をデータとして，＜いま・ここ＞がどんな運動をしてきているのかを解析し，
　　この運動から，反照的に空間 S の構造・ダイナミクスを推理する。

前後が重ならない地図をつくってしまうと，運動解析がそこで途切れてしまう。
また，地図 ϕ_P は地理を投影法で写すので，原点 (P と対応) を離れると誤差が大きくなる。
そこで，地図作成の要諦は，「地図を細かく接ぐ」である。

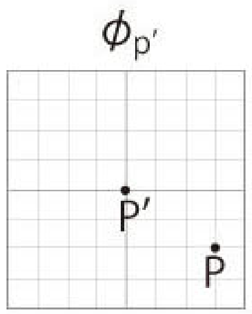
地図 ϕ_P を作成したわたしは，つぎに向かう先を　ϕ_P に載っている点 P' に定める。
そして出立する。



P' への移動は，ただの移動ではない。
移動には，
　　　　＜ϕ_P のデカルト座標の平行移動＞
の作業が含まれている。
実際，「地図を接ぐ」は「座標の保持」の上に可能になることである。
地図を接ぐ旅は，座標を接ぐ旅である。

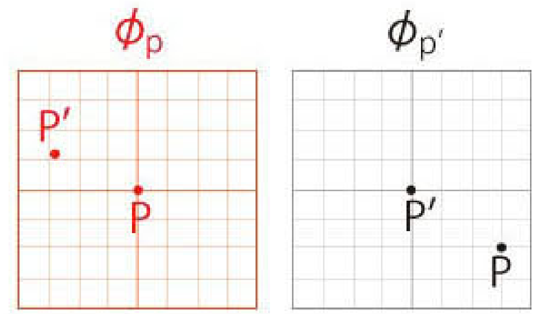
P' に着いたわたしは，地図 ϕ'_P を作成する。
このとき ϕ'_P のデカルト座標は，保持してきたデカルト座標の原点を P' に措いたものである。

P' は P から近い点を選んでいるので，ϕ'_P には P が載ることになる。



かくして，「地図を接ぐ」が果たされた。

1.2.4　曲線座標

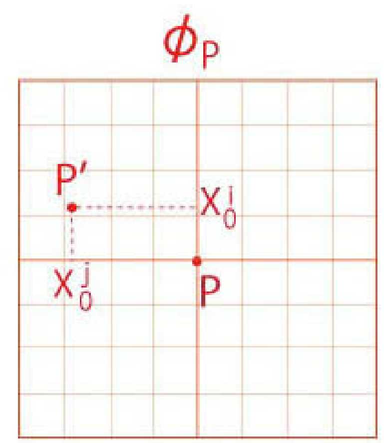


探査の旅は，＜いま・ここ＞の変化を現すためのものである。
地図 ϕ'_P は，新しい＜いま・ここ＞である ϕ'_P から，前の＜いま・ここ＞である ϕ_P を，見るためのものである。
地図 ϕ_P に地図 ϕ'_P を接いだわたしは，ϕ'_P に ϕ_P を書き込むという作業に入る。

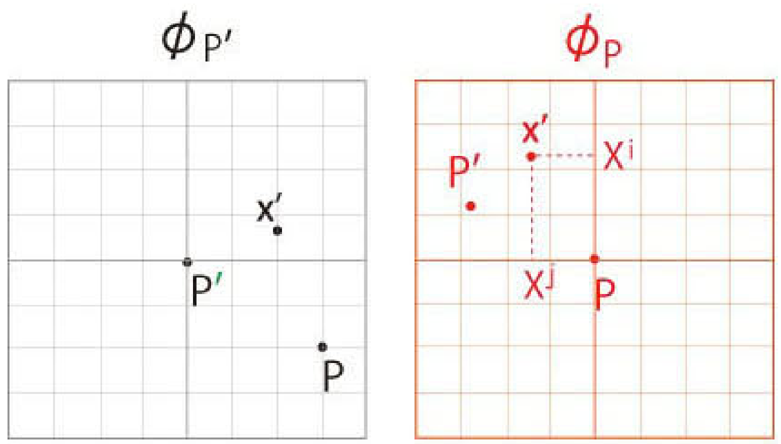
> この度の地図作成の目的は，各地の地理を知ろうというのではなく，わたしを空間の中の運動体として現し，反照的に空間の構造・ダイナミクスを現そうとするものである。
> ϕ'_P に ϕ_P を書き込む作業は，わたしを現す作業として行われるものである。

＜ϕ'_P に ϕ_P を書き込む＞は，つぎのことをする：

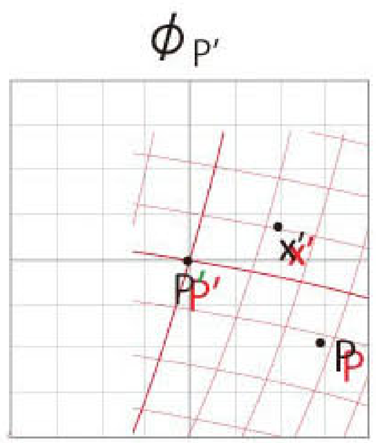
1. ϕ_P での P' の座標を (X^i_0) とする。



2. ϕ'_P 上の点 $\mathbf{x}'$ で，ϕ_P にも載っているものに対し，
   ϕ_P における $\mathbf{x}'$ の座標が (X^i) であるとき，
   $(x'^i) = (X^i - X^i_0)$ を $\mathbf{x}'$ の新座標とする。

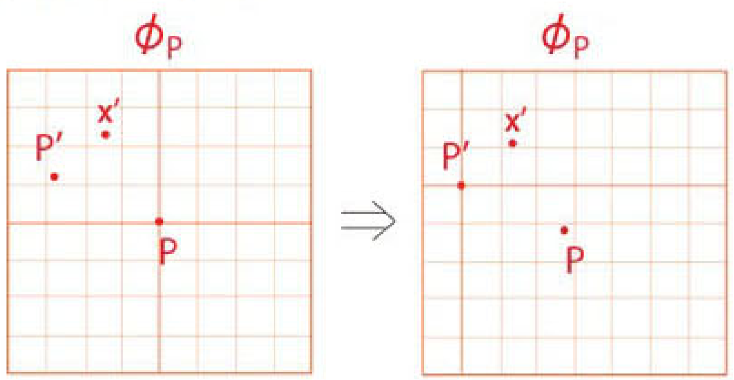


デカルト座標のメッシュに対応する新座標のメッシュは，下図の赤色のメッシュのようになる：

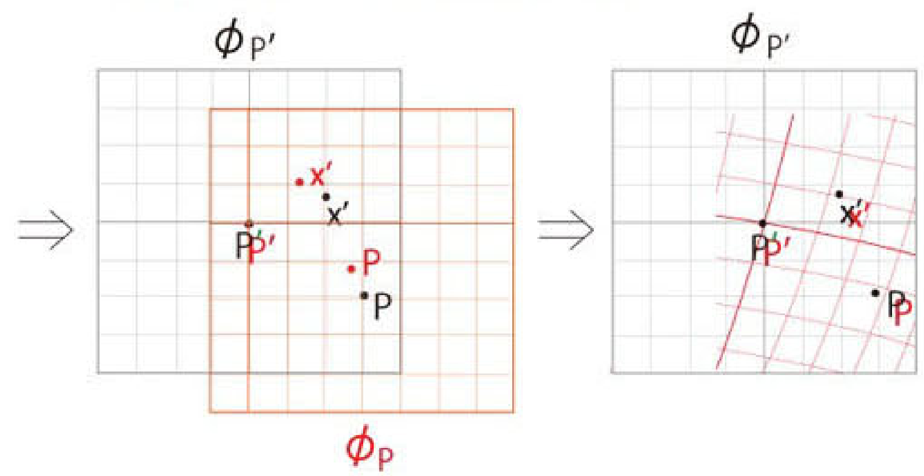


考え方：

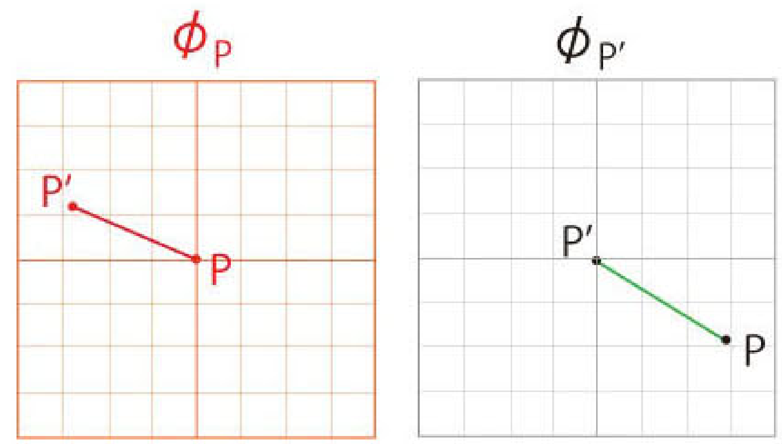
ϕ_P の原点を P' に移動

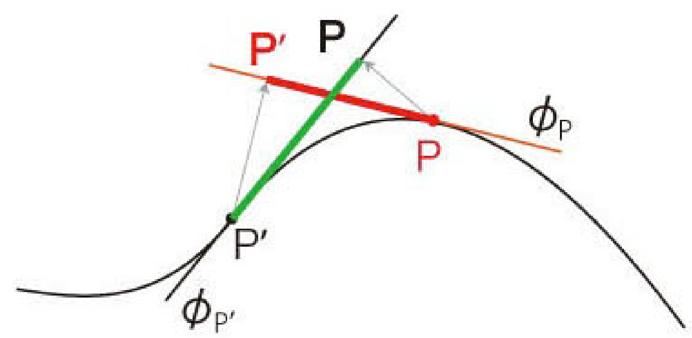


ϕ'_P に ϕ_P を，原点 (P') が一致するように重ね，
さらに，同じ点が重なるように ϕ_P を変形



ここで新座標が曲線座標になるのは，射影のしくみによって，二点間の観測される距離が違ってくるからである。
——例えば，P, P' 間の距離の場合だと：





翻って，曲線座標の解析から，空間の曲がりが知られるようになる。

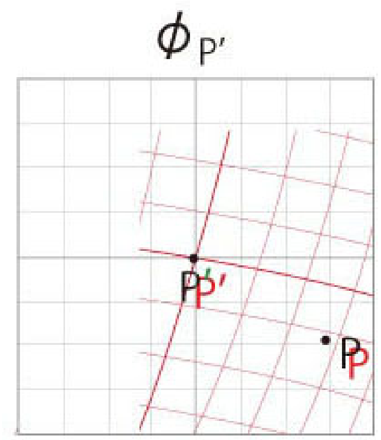
「空間探査は空間探査の旅をすることであり，わたしを空間の中の運動体として現すことで，反照的に空間の構造・ダイナミクスを現そうとするものである」というようなことを言ってきたが，それはこういうことである。

1.3 「平行移動」

1.3.1 「平行移動」とは

<地図を接ぐ>では，直近に作成の地図のデカルト座標を接ぐ。
どのように接ぐかというと，平行移動で接ぐ。

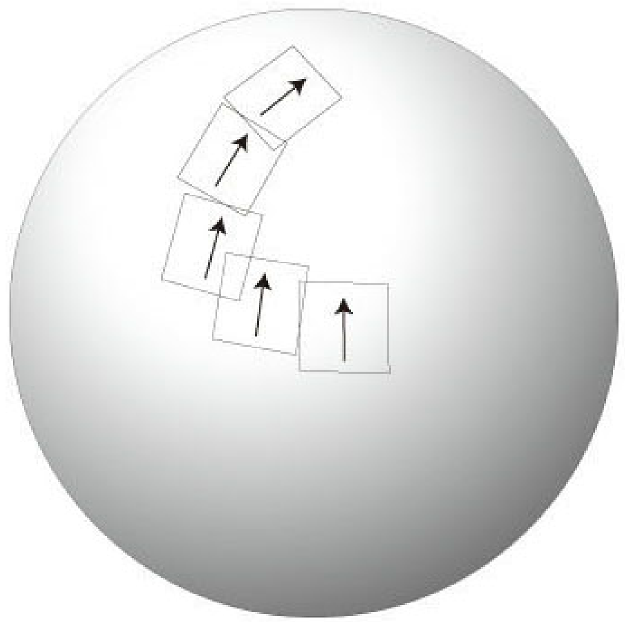
地図 $\phi_{P'}$ に，直近作成の地図 ϕ_P を読み込む。
ϕ_P の座標軸の向きは，$\phi_{P'}$ のデカルト座標の向きとは違う。



ϕ_P の座標軸を平行移動で運んできたはずなのに，向きがもととは違っている。
なぜこうなるのか

平行移動は，空間の接平面で行っている。
P から P' への移動では，経路の各点でその都度接平面を設定し，その上で座標の平行移動を行っている。

座標の向きが平行移動で変わるのは，平行移動が接平面のとっかえひっかえで行うものだからである。
接平面のとっかえひっかえが，座標の向きを変えていくことになるのである。



1.3.2　平行移動の経路依存

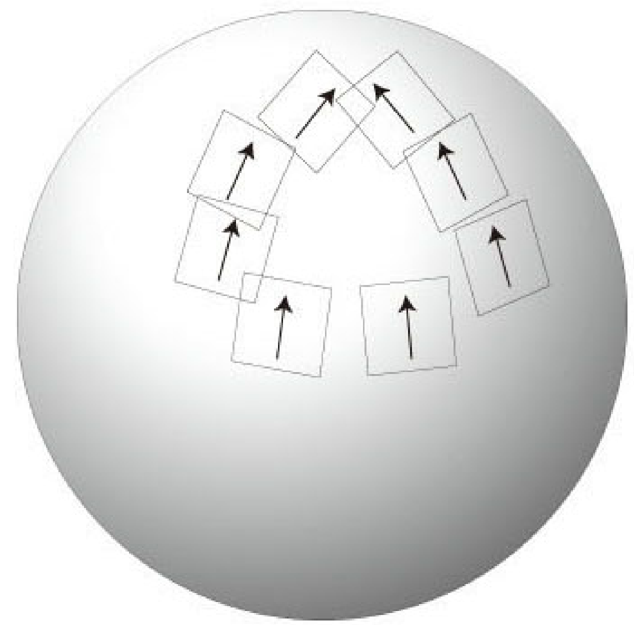
空間探査は，地図を接ぐ作業である。
＜地図を接ぐ＞は，一見つぎのように思われる：

《時間・手間を考えなければ，空間すべての点に地図が立つ》

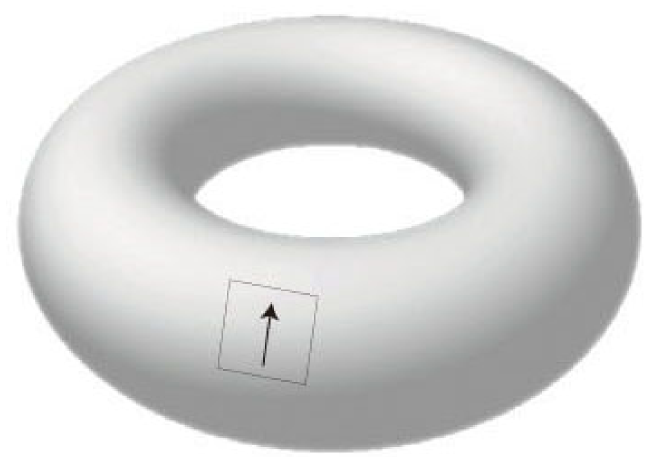
しかし，こうはならない。

＜地図を接ぐ＞には，＜デカルト座標の保持を接ぐ＞が含まれている。
座標の保持の方法は，座標の平行移動である。
そしてこの平行移動は，一般に経路依存になるのである。

つぎは，座標軸を球面で平行移動しているところである。
交差するところで，座標軸の向きが違っている。



但し，曲面だから平行移動が経路依存になる，というのではない。，
実際，つぎのトーラス——円筒の両端をつないだもの——は，平行移動の経路依存は生じない。



2　時空間

2.1 「進化する空間」

2.2　時空

2.1 「進化する空間」

2.1.1「n 次元人」って何よ？

自分の＜わかっている＞は，所詮＜わかっているつもり＞である。
心理の機序は，＜わかる＞への願望を落ち着かせるのに，＜わかっているつもり＞を用いるのである。
そのような＜わかっているつもり＞のうちに，つぎのものがある：

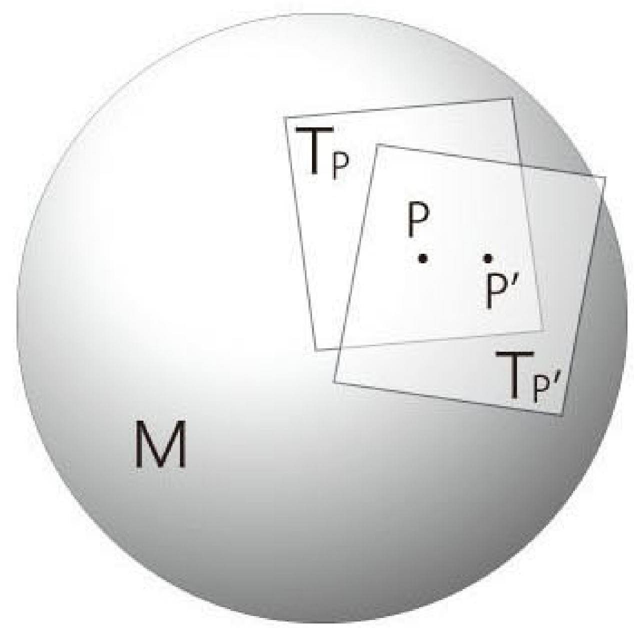
低次元の話を，高次元の喩えとしてわかっているつもり

「現空間」の主題化は，『相対性理論』を意識している。
実際，主題化したいものは，『相対性理論』がいう「空間の曲がり」である。
「空間の曲がり」を主題化する数学は，「多様体」である。
そこで，われわれの空間を「多様体」に見なそうとする。
さて，この「見なす」は，どんなふうにすることか？

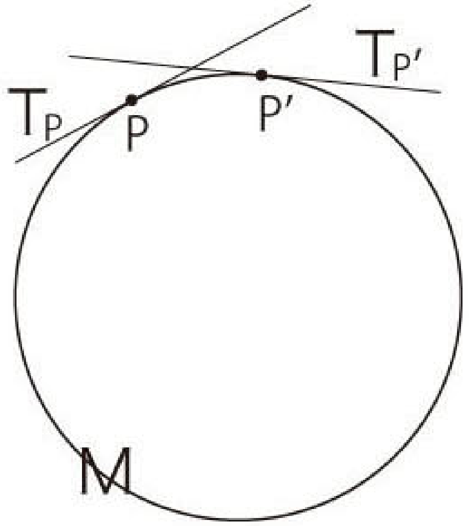
＜わかったつもり＞は，低次元の喩えに寄り掛かることで得ている：

「２次元人──２次元多様体に棲む」
「１次元人──１次元多様体に棲む」
よって，
「われわれ──３次元多様体に棲む」

「２次元人」の喩えで使う多様体の絵は，球面である：



「1次元人」だと，円である：



ここで，T_P, $T_{P'}$ は，それぞれ点 P, P' における接平面・接線 (→「接ベクトル空間」)。

よって，「われわれ──３次元多様体に棲む」は，「３次元超球面・３次元接超平面」の絵になる。
この絵を，低次元の延長として，飲み込むというわけである。

しかしこれは，＜飲み込んだつもり＞である。
実際，この＜飲み込んだつもりつもりの絵図＞は，いったいどう使えるというのか。

2.1.2「接ベクトル空間」の不明

つぎの喩えは，自分で自分を騙すためのものである：

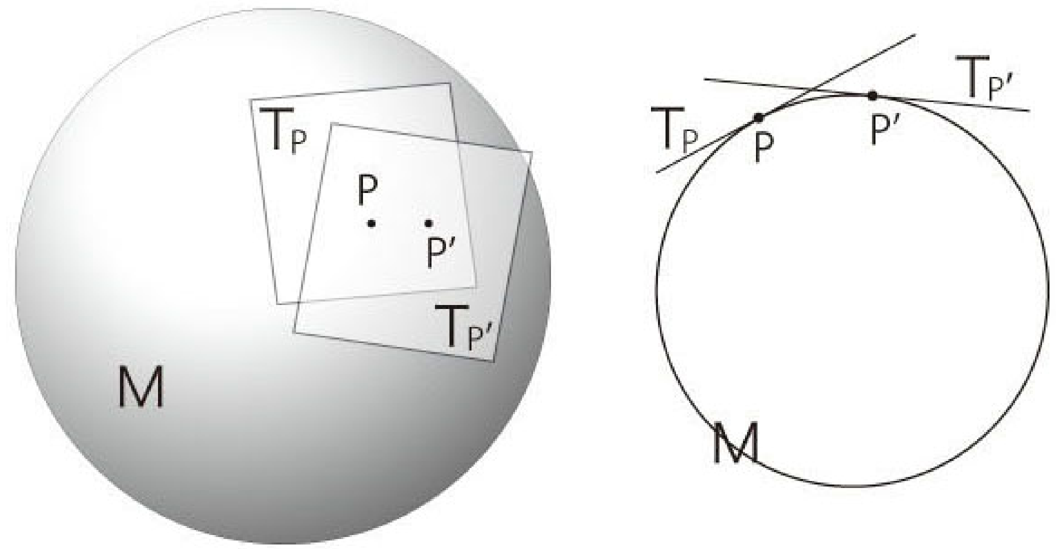
「1次元人──1次元多様体に棲む」
「2次元人──2次元多様体に棲む」

即ち，つぎの措定に対し，「*なるほど*」と自分を騙すわけである：

「われわれ──３次元多様体に棲む」

これが騙しであることは，「３次元多様体の接ベクトル空間──３次元」の概念にきちんと対すれば，わかる。

そもそも，接ベクトル空間は，土台の空間からはみ出る存在になる。
接点に立てたデカルト座標の軸は，空間の外側に出ていく，ということである。



３次元でこの様を思い描けるか。

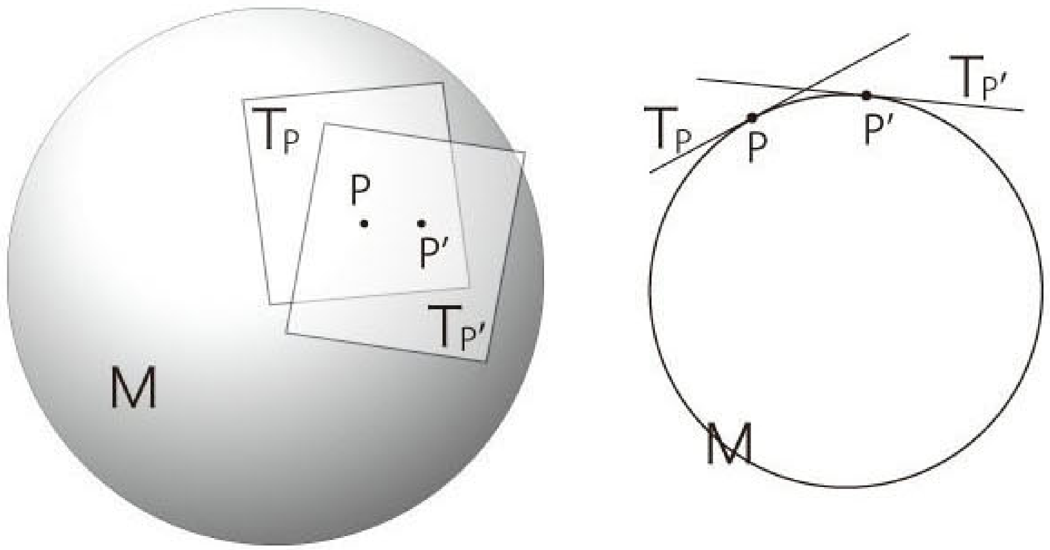
３次元では，「デカルト座標の軸は空間の外側に出ていく」は思い描けない。
優先されるのは，この常識の方である。
即ち，つぎのように考えることになる：

《「1・２次元 → ３次元」の延長では，「1・２次元」の絵が変更される》

2.1.3「進化する空間」の多様体構造

多様体の絵は，「接ベクトル空間」の定位が要点になる。

下の絵は，接ベクトル空間がもとの空間からはみ出る空間になっている。
接点に立てたデカルト座標の軸は，空間の外側に出ていくのである。
この絵はまた，空間の表面を接ベクトル空間がスライドするような絵になっている。
接ベクトル空間の「シフト」を，「スライド」にしているわけである



この絵は，３次元へは延長できない。
「３次元への延長」でこの絵を用いるのは，ミス・リーディングということになる。

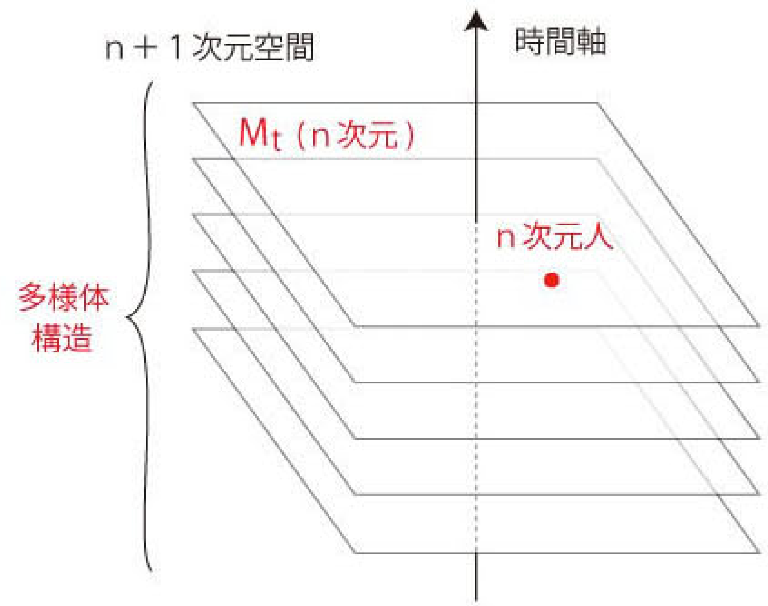
実際，次元の延長は，単純なものではないのである。
次元の延長は，多様体の絵をすっかり変えるものになる：

《「１・２次元 → ３次元」の延長では，「１・２次元」の絵が変更される》

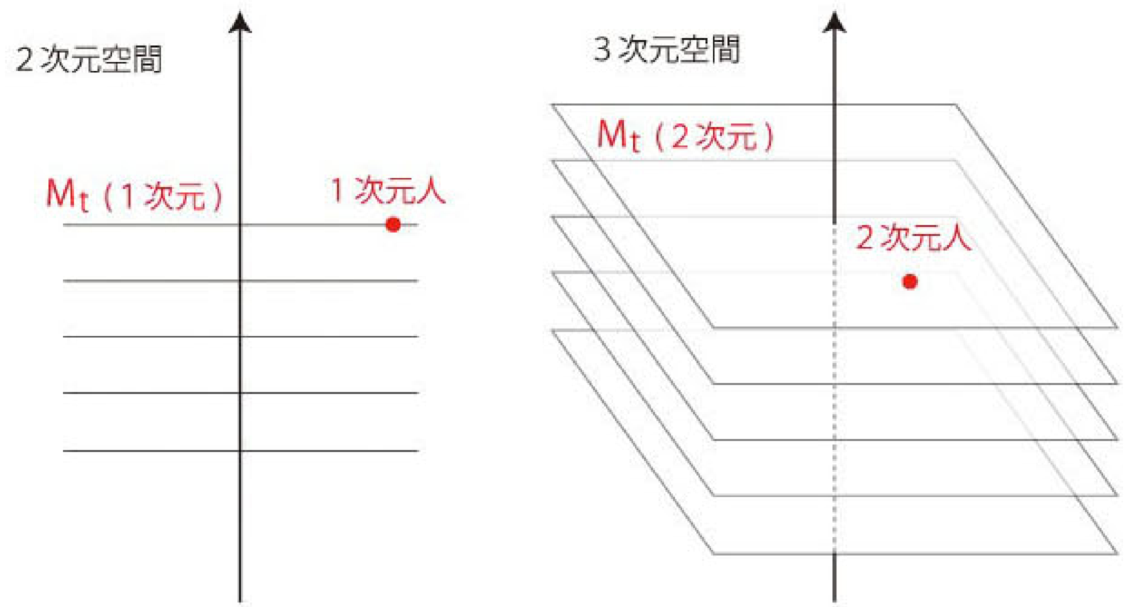
３次元多様体は，どんな絵図を以て理解されるものになるか。
要点は，接ベクトル空間 (３次元) のシフトの方向である。
即ち，接ベクトル空間 (３次元) のシフトが進行する軸である。

現実的な軸は，時間軸である。
時間軸を択るとは，空間を「逐次更新する空間」──「進化する空間」──として捉えるということである。
（「*一秒前の空間，いまの空間，１秒後の空間*」）
──翻って，上の絵で描かれている空間は，「不変な空間」である。

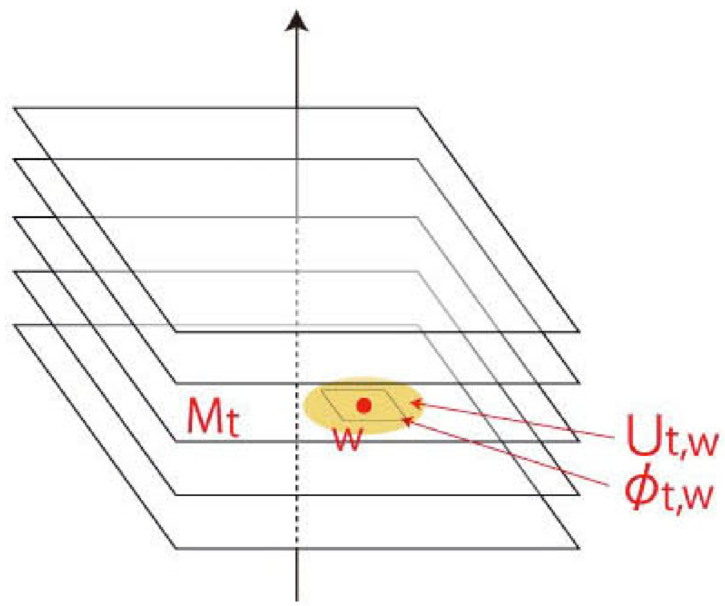
「進化する空間」は，一般次元ｎで，つぎの絵になる：



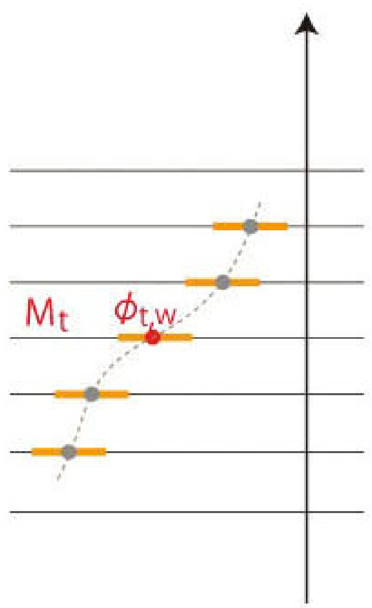
１・２次元の場合だと，つぎのようになる：



「接ベクトル空間」は，M_t ごとに考えることになり，かつ「M_t と重なっていて，不可視」と考える。
M の点は，M_t の点として $(t,\ w)$ $(w \in M)$ と表記されるものになる。
そして，$(t,\ w)$ の近傍 $U_{t,w}$ と地図 $\phi_{t,w}$ は，つぎのように描かれるものになる：



特に，つぎが「地図を接ぐ」の絵である：



注意：「地図を接ぐ」は，横方向の動き (一つの M_t 上のスライド) にはならない。

この「地図を接ぐ」は，まったく現実的なものである。

例：「歴史地図帳」

このときの「多様体構造」は，「空間の束」構造である。
「接ベクトル空間」が見えなくなっているが，＜地図を書く台＞として存在していることになる。

この構造の数学名称は，「ファイバーバンドル」である。
その都度更新される空間を「ファイバー」とする「束 bundle」が，このときの「多様体」である。

2.2　時空

2.2.1 『相対性理論』

われわれの空間を多様体として考えようとするとき，多様体構造は４次元になる。
ここで「４次元」を現実的なものとして考える方法は，「時空４次元」——空間の３次元と時間の１次元を合わせて４次元——である。

空間に時間軸を加えることは，空間を「逐次更新する空間」——「進化する空間」——にすることである。
「更新」させているものは，「運動」である。
「進化する空間」は，「運動する空間」である。

ここでの「時空４次元」は，『相対性理論』を展望したものである。

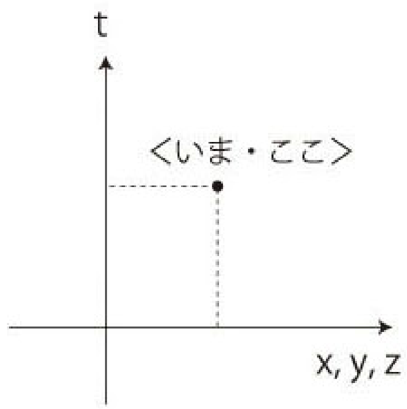
『特殊相対性理論』は，運動を「等速運動」に設定した場合である。
このときの「平行移動」は，向きを保つが，長さが変わる。

『一般相対性理論』は，運動を「慣性運動」へと一般化した場合である。
このときの「平行移動」は，向きも変わる。
向きを変えるものは，「重力」という空間構造である。

2.2.2　時空４次元の旅

リーマン幾何学は，宇宙空間の空間構造を定めるものではない。
数学は「if (所与) then ‥‥」の体系であり，数学の実用は所与が定まってから始まる。
宇宙空間の探査では，『相対性理論』が与える「時空４次元」を，宇宙空間の構造とする。

ここまで，空間の点の表現として＜いま・ここ＞の言い回しを用いてきたが，それは，「空間」が「時空間」になることを見越してのことであった。
実際，空間探査の旅の記録は，「いつ・どこで」の記録であるから，それの座標は時空4次元なのである。



スケジュール帳が日常的に使われる。これは時空４次元の実践である。
「４次元」というと，「クラインの壺」のようなものを思い浮かべ，「超次元」のように思ってしまう向きがある。しかし，「時空４次元」は，現実的/卑近な「４次元」である。

「リーマン多様体」は，「見えない空間──見えないのはわたしがこの中にいるから」を主題化する幾何学である。
よって，「地図作成の旅」の「旅」は，「地面の上の移動」のようにイメージすると，間違う。
実際，「地面の上の移動」であれば，空間が既に見えているわけである。──地面を見る目は，空間の外に立って空間を見る目である。

「見えない空間──見えないのはわたしがこの中にいるから」は，宇宙空間がまさにこれである。
そこで，「地図作成の旅」の「旅」は，「宇宙空間の中の移動」がまさにこれである。

この「旅」は，「宇宙船の旅」を意味するのではない。
ふつうにしていることが「旅」であり，日記を書くことが「地図作成」である。
これが「旅」になっていることは，日記帳を読めばわかる。

「リーマン多様体」は，「宇宙空間の幾何学」をイメージにすると，基本的なところで間違わずに済む。
では「リーマン多様体」に添わせるべき「宇宙空間」の論は，何がこれにあたるか。
『相対性理論』ということになるわけである。

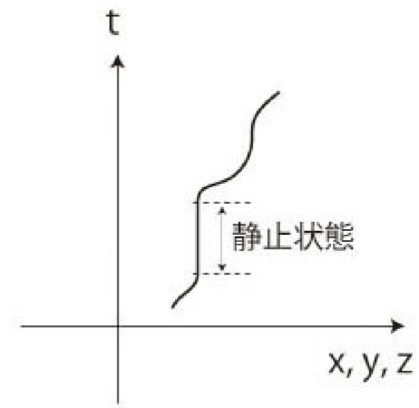
2.2.3　＜いま・ここ＞＝＜わたし＞

時空４次元の＜いま・ここ＞を占める存在は，＜わたし＞である。
空間探査の方法論は，
　　《＜わたし＞の軌跡から，反照的に空間を現す》
である。
哲学の存在論としては，「わたし＝万物の尺度」タイプをやっていることになる。

「わたし＝万物の尺度」は，主観論や主知論とは違う。
「わたし＝万物の尺度」は，優越的立場を意味しない。
「わたしには，手持ちが＜わたし＞しかない」という弱い立場の表明である。

2.2.4　慣性

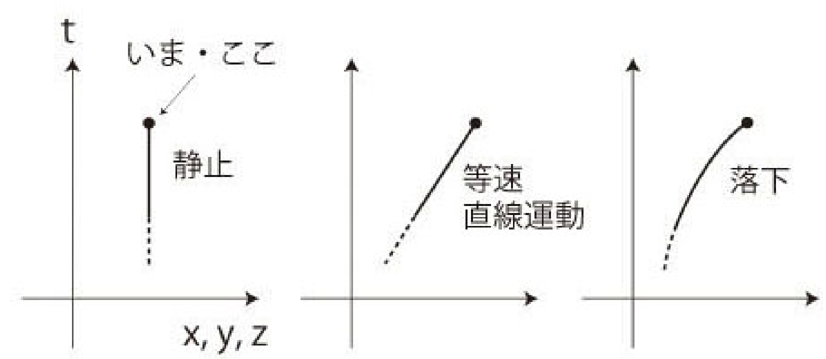
時空の中では，存在していることそれ自体が，旅である。
実際，じっとしていても，時空４次元の中では動いている：



流れに身を任せることを「無為」という。
相対性理論では，「重力に任せて落ちる」を含めて，「慣性運動」の表現になる。
即ち，ニュートン力学の「静止」「等速直線運動」と合わせて，慣性運動はつぎの３つである：

- 静止
- 等速直線運動
- 自由落下

＜わたし＞の無為がこのうちのどれであるかは，＜いま・ここ＞を見ても，わからない。
このとき，これまで記録してきた地図帳の出番になる。
地図帳を，＜いま・ここ＞の履歴帳として用いるわけである。



II　データ

3　地図帳

3.1　地図設定

3.1.1　わたしの真っ直ぐは，真っ直ぐでない

「リーマン多様体」は，アインシュタインが「一般相対性」の幾何学にしたものである。

「相対性」の意味は，「多様性」「それぞれ好き勝手」ではない。

わたしは，空間の各点 P で，**同じ**正規直交座標を設け，その点を中心とした地域の地図 ϕ_P をつくる。
しかし，ϕ_P の正規直交座標は，他の点 P' の地図 ϕ'_P にこれを読み込むと，歪むことになる。
＜真っ直ぐ＞と＜歪む＞が共存するのである。

線型に歪んでいるのなら，それは当たり前であり，ユークリッド幾何学の内容である。
しかしこの場合は，非線形に歪むのである。

「非線形に歪む」は，《「平坦でない」空間に対して地図をつくれば，地図の＜周辺効果＞としてこうなる》というものである。
日常で使う地図がそうであるように，「平坦でない」ものの地図は周辺部が歪むのである。

わたしは，別のわたしには歪んで見える。
これが，「リーマン多様体」が含蓄する「相対性」であり，「一般相対性理論」の謂う「相対性」である。

実際，「リーマン多様体」は，この「相対性」の幾何学である。
「一般相対性理論」のテクストは，そのなかで「リーマン幾何学」を解説するが，その解説はたいてい間違っている。
「相対性」の意味がわかっていないのである。
「相対性」の意味を「それぞれ好き勝手」の話にして，いろいろな座標系の話にしてしまう。
そもそも，「多様体」を踏まえていないので，「多様体」の話――地図の話――になっていないのである。

3.1.2　リーマン多様体の地図帳

リーマン多様体は，多様体である。

「多様体」の話は，地図の話である。
これは，場所場所で地図を好き勝手につくるという話ではない。
地図は，同じ規準でつくられる。
場所場所で正確につくるのである。
しかし，地図は中心から離れたところが実際に対して歪んでくる。
この歪みを計量的に理解しようというのが，「多様体」の話である。

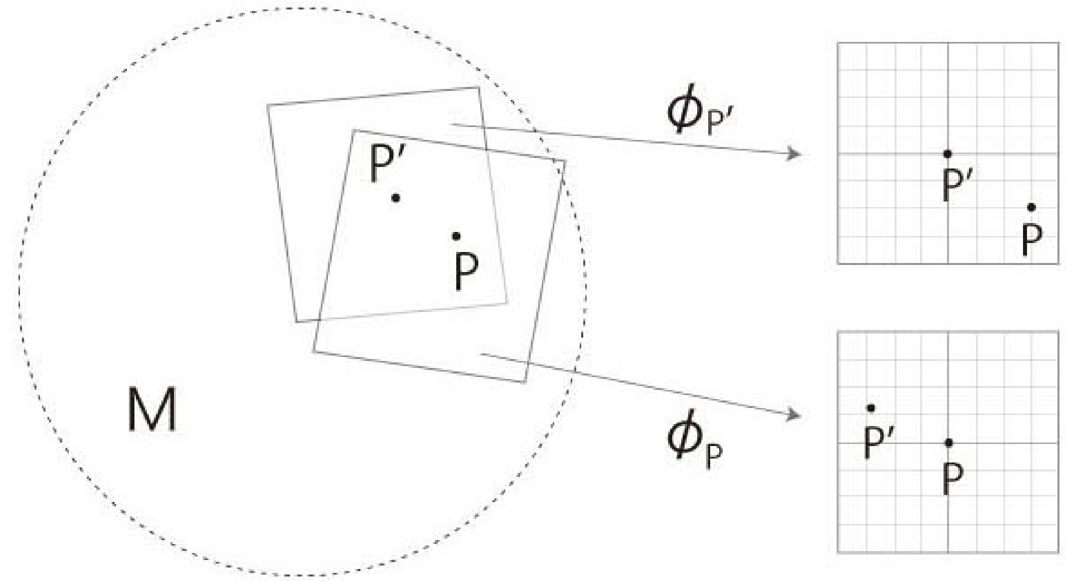
実際，「歪み」は，「＜同じ規準＞でつくったものの間の相対性」として考えられるものである。
場所場所で好き勝手に地図をつくっていたら，「歪み——相対性」の論にはならない。

多様体でつくる地図は，同じ規準でつくるものである。
その規準は，端的に，「正規直交座標」である。
実際，「歪み——相対性」をこれから主題化しようというとき，なぜ＜規準＞をわざわざ弛める必要があるか。
「歪み——相対性」を導出できるためには，地図作成の規準は厳格でなければならない。

リーマン多様体は，多様体である。
そしてリーマン多様体は，つぎの条件を以て多様体の特殊である：

> リーマン多様体 M は，点 P ごとに「P 近傍地図 ϕ_P」が作成されている。
> そして，ϕ_P の内容は，P の変化に対してなめらかに変化する。

ここで，「なめらか」は「C^r 級」のことばで定義される。



M の接ベクトル空間の次元 n に対し，$\phi_P \subset \mathbb{R}^n$ である。

《どの点も自身の近傍地図をもつ》は，《地図は接いで使う》を含蓄する。
そして《地図は接いで使う》は，《地図は小さい——大きいのは無駄》を含蓄する。

リーマン多様体 M の地図帳は，そんな地図を束ねたものである。
この「地図帳」は，超越論的な存在になる。
実際，「リーマン多様体」は，超越論である。

3.1.3　点ごとに地図を設ける

リーマン多様体は，可微分多様体一般と何が違うのか。

あるテクストは，計量がどうので，リーマン多様体を可微分多様体の特殊と位置づける。
しかし，リーマン多様体を可微分多様体一般から分けるものは，「点ごとに地図を設ける」のただ一点である。

なぜ点ごとに地図を立てるのかというと，空間の中の論だからである。
空間の中だから，空間が見えないのである。
空間を捉えようとする体勢は，手探りである。
これが「点ごとに地図を設ける」の意味である。

対して可微分多様体一般は，外から空間を観ずる体の論である。
空間が見えているから，機能的に地図を設ける。
日常使っている地図帳の趣きになるわけである。

3.1.4　地図の内容

点 P ごとに設けられる地図 ϕ_P は，地図帳の中の１頁として，ただ一つである。

地図 ϕ_P は，は「平面図」——超平面図——である。
この上には，二つの座標が設けられる。
一つは，直線座標——正規直交座標 (デカルト座標) ——である。
もう一つは，曲線座標である。

地図は，つぎの二つの地図の重ね書きである：

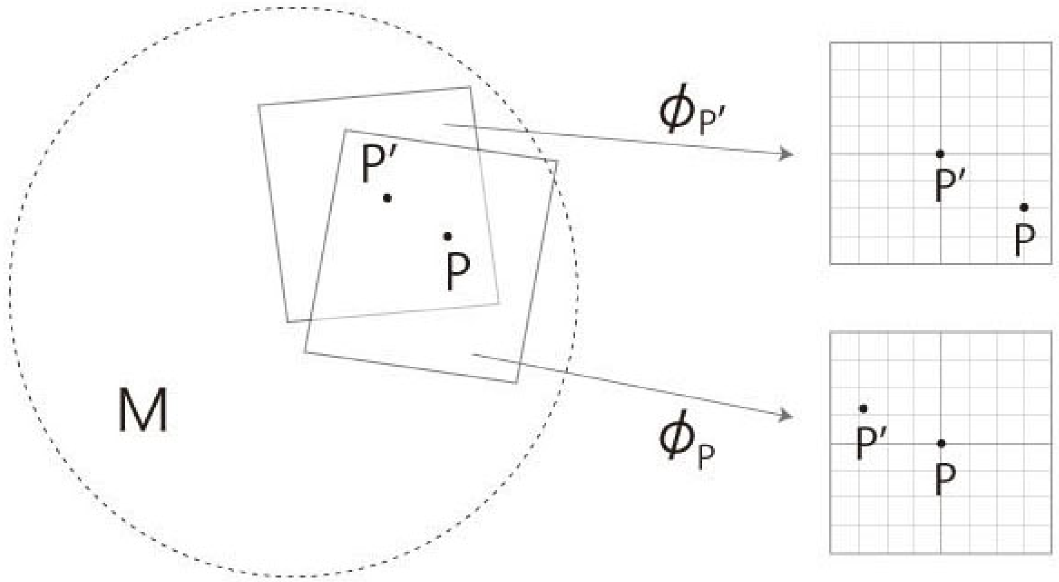
a. 直線座標の地図
b. 曲線座標の地図

ϕ_P の直線座標地図は，P から観える世界を写す地図である。
曲線座標地図は，別の地図$\phi_{P'}$ を読み込んだものである。

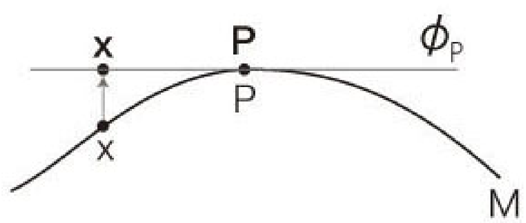
3.1.5　デカルト座標

リーマン多様体 M は，点 P ごとに地図 $\phi_P \subset \mathbb{R}^n$ をとる。
地図 ϕ_P は，P における M の接平面に，固定されて乗っている。
この「固定」には，つぎのことが含まれる：

「正規直交座標 (デカルト座標) が設定され，かつ固定されている」



この面に，P から観察される世界を写す。
写し方は，投影法である：



デカルト座標は，すべての地図で同じ規格である。

1. 地図のスケールは，すべての地図で同じ
2. 正規直交座標――この意味での「デカルト座標」
3. 地図 ϕ_P は，P に座標の原点を置く

デカルト座標の基底ベクトルを，

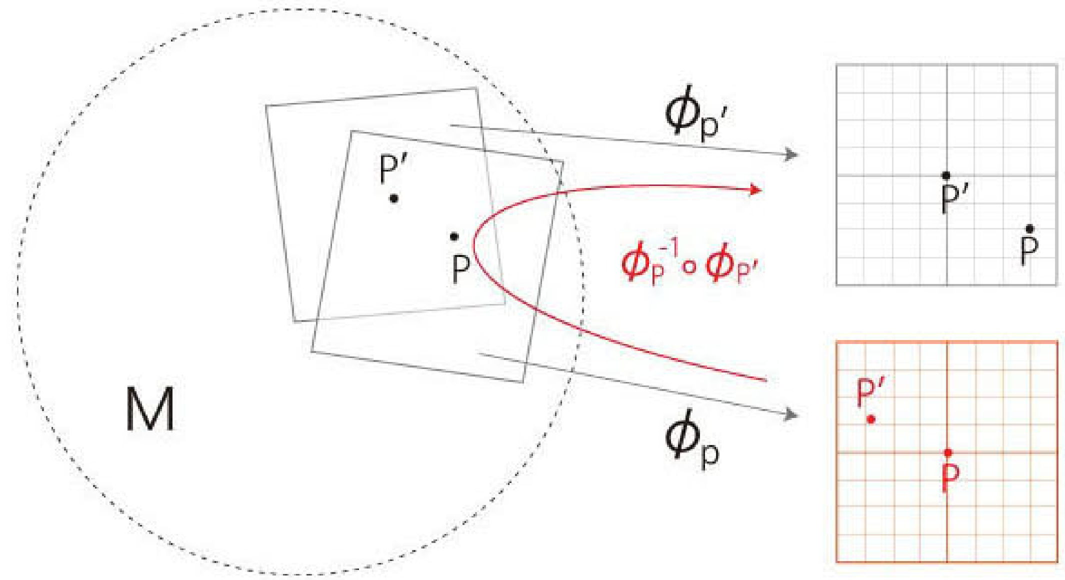
$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n)$$

で表し，座標を x^i で表すとする：

$$(x^1, \cdots, x^n)$$

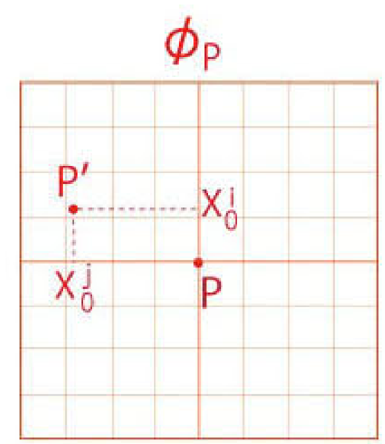
3.1.6　曲線座標

「曲線座標の地図」は，以下に述べる「地図 $\phi_{P'}$ への地図 ϕ_P の読み込み」である：

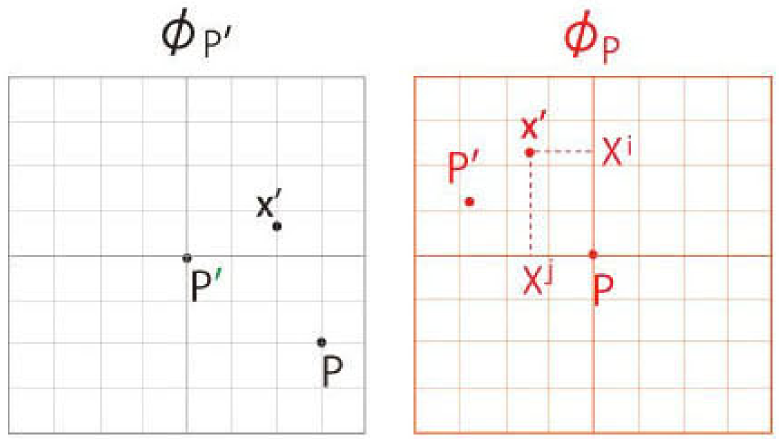


「読み込み」は，つぎの操作である：

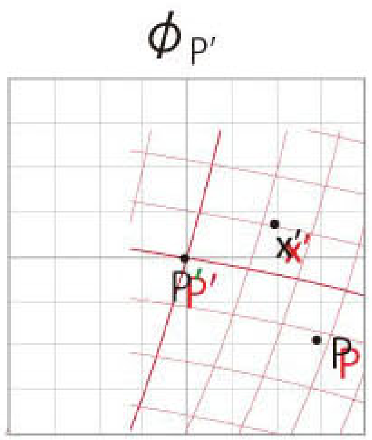
1. ϕ_P での P' の座標を (X_0^i) とする。



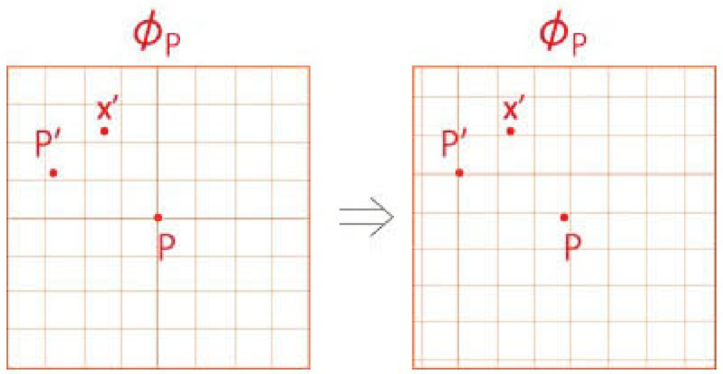
2. ϕ'_P 上の点 $\mathbf{x}'$ で，ϕ_P にも載っているものに対し，
ϕ_P における $\mathbf{x}'$ の座標が (X^i) であるとき，
$(x'^i) = (X^i - X_0^i)$ を $\mathbf{x}'$ の新座標とする。



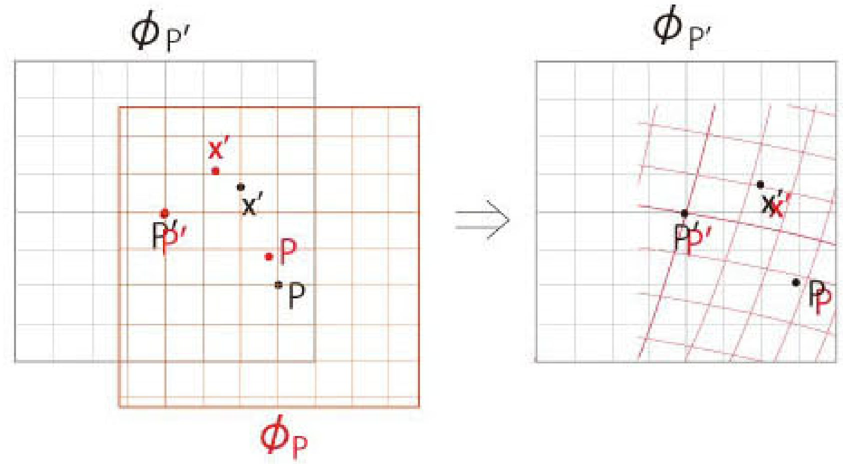
デカルト座標のメッシュに対応する新座標のメッシュは，下図の赤色のメッシュのようになる：



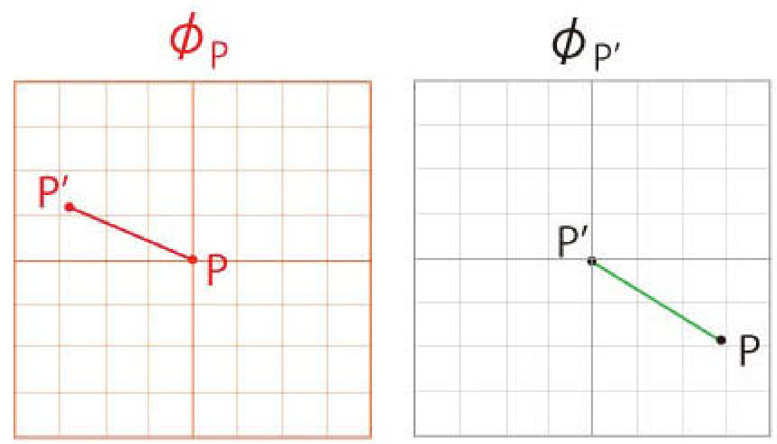
考え方：
ϕ_P の原点を P' に移動

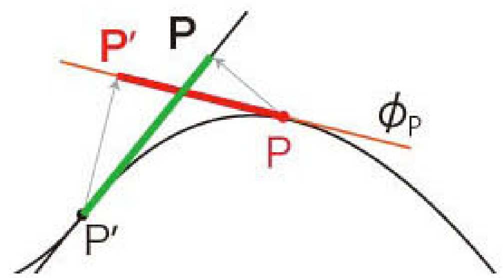


ϕ'_P に ϕ_P を，原点 (P') が一致するように重ね，
さらに，同じ点が重なるように ϕ_P を変形



ここで新座標が曲線座標になるのは，射影のしくみによって，二点間の観測される距離が違ってくるからである。
——例えば，P, P' 間の距離の場合だと：





---

(1)　ϕ_P のデカルト座標の基底を，

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n\}$$

とする。
この基底に対する座標系を，X^i 座標系と称する。

(2)　曲線座標（上図の赤色のメッシュ）を，x^i 座標系と呼ぶ。

(3)　曲線座標の基底――局所直線基底――を,

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$$

で表し，基底 $\mathbf{E}$ に対する各 $\mathbf{e}_i$ の座標を

$$(e_i^1, \cdots, e_i^n)$$

とする――即ち,

$$\mathbf{e}_i = e_i^1\,\mathbf{E}_1 + \cdots + e_i^n\,\mathbf{E}_n \quad (i = 1, \cdots, n)$$

3.1.7　曲線座標地図は何のため

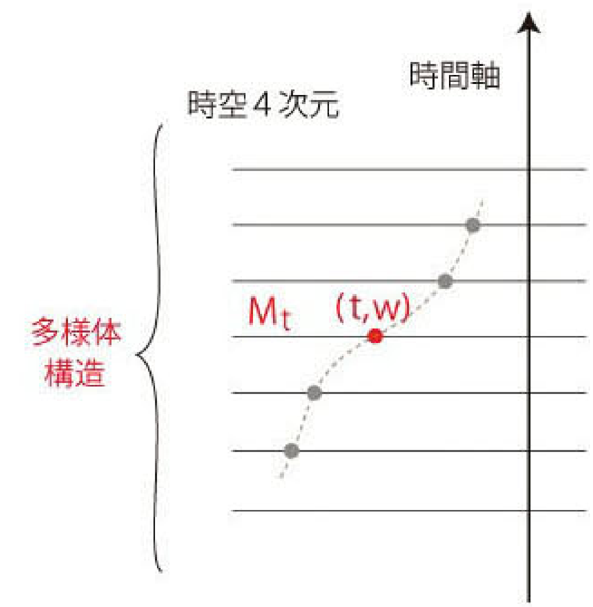
地図 ϕ_P は，つぎの二つの地図の重ね書きである：

a. デカルト座標の地図
b. 曲線座標の地図

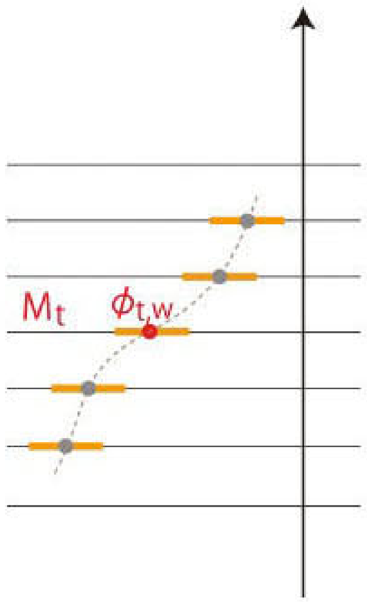
デカルト座標地図は，P から観える世界を写す地図である。
曲線座標地図は，別の地図を読み込んだものである。

曲線座標地図は，何のためか。
即ち，どんなときに用いられるものなのか。

わたしの<いま・ここ>は，時空間の点 (t, w) として移動する。



わたしは，わたしの<いま・ここ>がどんなふうなのかを知ろうとする。
このとき行うことは，わたしの<いま・ここ>の経緯――運動の軌跡――を調べることである。
それは，わたしの過去を調べることである。
その過去は何に記録されているかというと，わたしの<いま・ここ>の地図帳 $\{\phi_{t,w}\}$ にある。



こうしてわたしの過去の追跡は，地図の読み込み $\phi_{t_1,w} \to \phi_{t_2,w}$ $(t_1 < t_2)$ をつなぐというやり方で，「わたし」をプロットする作業である。
そしてこの読み込みの一つ一つが，曲線座標地図を解析するという作業——その内容は「座標変換」——になる。

3.2　曲線座標のデカルト座標

3.2.1　リーマン多様体論における「座標変換」の内容

3.2.2　座標変換式

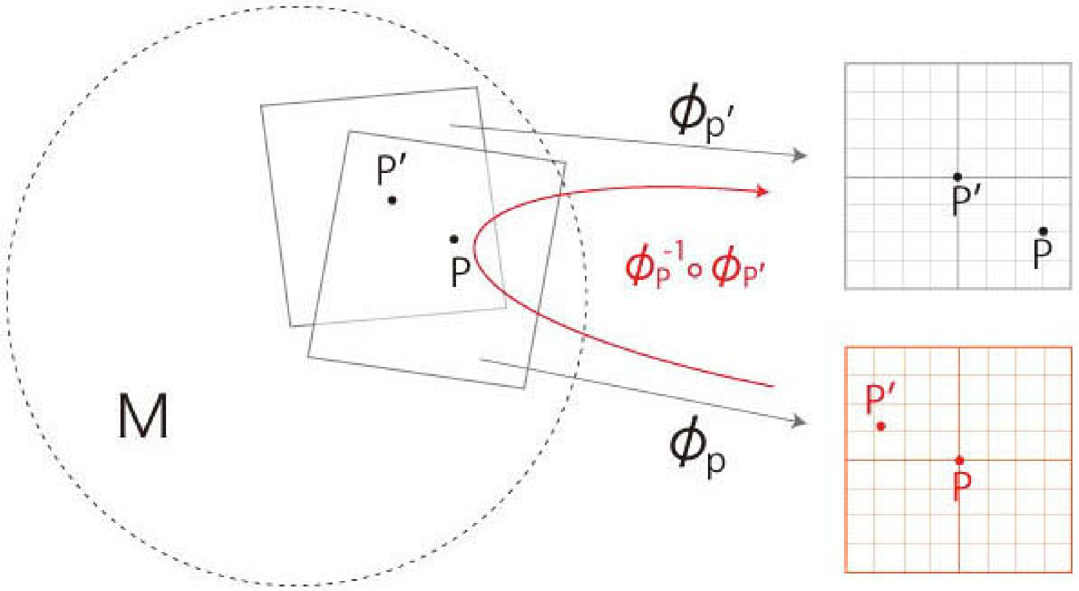
3.2.1　リーマン多様体論における「座標変換」の内容

リーマン多様体の地図 ϕ_P は，つぎの二つを合わせて使う：

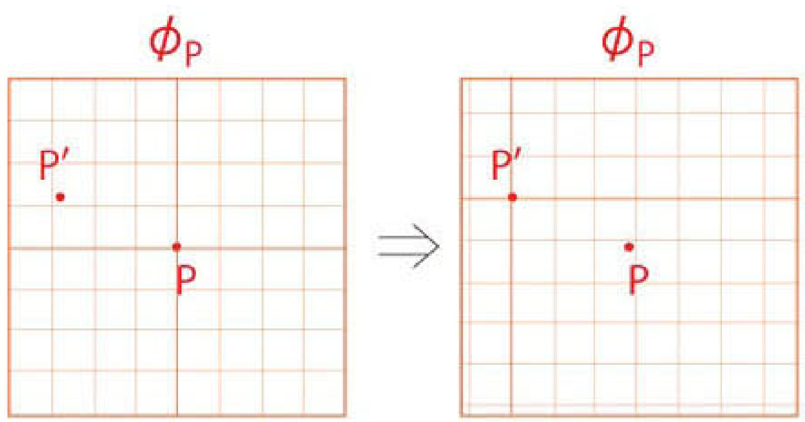
a. P から観える世界を写した地図
b. 別の地図の読み込み

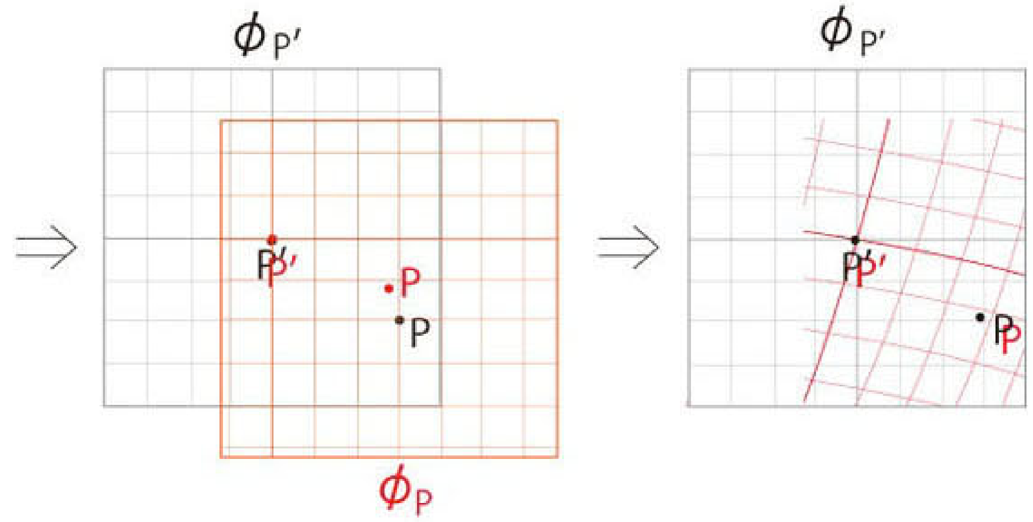
a は，直線座標——正規直交座標 (デカルト座標) ——に順う。
b は，結果的に，曲線座標になる。

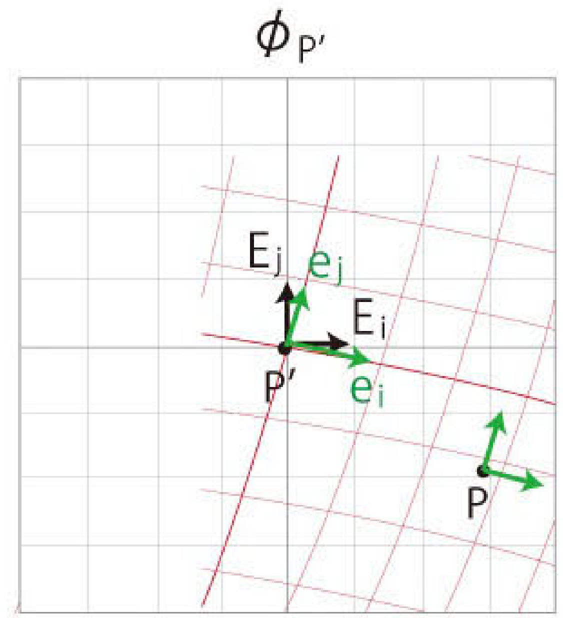
地図 ϕ_P を地図 ϕ'_P から読み込む：



読み込まれた ϕ_P のデカルト座標が曲線座標になる：







(1)　デカルト座標の基底を，

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n\}$$

とする。
この基底に対する座標系を，X^i 座標系と称する。

(2)　曲線座標 (上図の赤色のメッシュ) を，x^i 座標系と呼ぶ。

(3)　曲線座標の基底——局所直線基底——を，

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$$

で表し，基底 $\mathbf{E}$ に対する各 $\mathbf{e}_i$ の座標を

$$(e_i^1,\ \cdots,\ e_i^n)$$

とする――即ち，

$$\mathbf{e}_i = e_i^{\ 1}\,\mathbf{E}_1 + \cdots + e_i^{\ n}\,\mathbf{E}_n \quad (i = 1, \cdots, n)$$

<u>リーマン多様体で主題になる「座標変換」は，以上の基底の間の座標変換であり，これに限る。</u>
「リーマン多様体/幾何学」のテクストには，きまって極座標，球面座標，円筒座標の類が出てくるが，これはつぎの二つが混在している状態である：

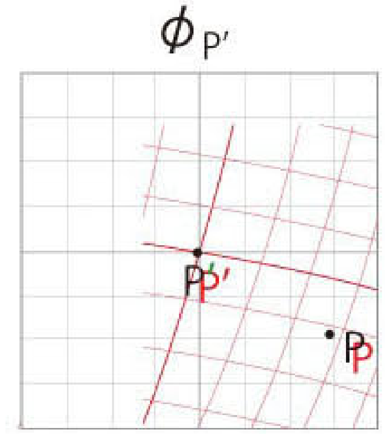
a. リーマン多様体の理論
b. リーマン多様体のモデル論

学習者は，これにも躓く。
「この幾何学的対象がリーマン多様体のモデルになるのは，どんな趣旨によってか」の説明が無くて導入されるからである。

テクストの書き手も，極座標等を勘違いして取り上げているふしがある。
局所直交座標と極座標の変換のようなのを「リーマン多様体の座標変換」にしているからである。

3.2.2　座標変換式

地図 ϕ'_P に，地図 ϕ_P を読み込む。
この結果，曲線座標が導かれる。



この曲線座標は，いまの自分に対し以前の自分の「真っ直ぐ」を相対化するものである。

「真っ直ぐ」が曲線座標の形で相対化されるようになると，つぎはこの相対性の数量化へと進む。
それは，正規直交座標と曲線座標との間の変換規則――座標変換――を求めることである。

註：「リーマン多様体」で主題になる「座標変換」は，いま述べたものである。
<u>「直交座標から球面座標への変換」のようなものではない！</u>

以下，ϕ'_P 上の座標変換を示す。

---

(1)　ϕ_P のデカルト座標の基底を，

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1,\ \cdots,\ \mathbf{E}_n\}$$

とする。
この基底に対する座標系を，X^i 座標系と称する。

(2)　曲線座標 (上図の赤色のメッシュ) を，x^i 座標系と呼ぶ。

(3)　x^i 座標系の基底――局所直線基底――を，

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n\}$$

とし，基底 $\mathbf{E}$ に対する各 $\mathbf{e}_i$ の座標を

$$(e_i^1,\ \cdots,\ e_i^n) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とする——即ち，

$$\mathbf{e}_i = e_i^{\ 1}\mathbf{E}_1 + \cdots + e_i^{\ n}\mathbf{E}_n \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$(\mathbf{E}_1,\ \cdots,\ \mathbf{E}_n)$ に対する座標 $(X^1,\ \cdots,\ X^n)$ と基底 $(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$ に対する座標 $(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ が同じ点を表すとすると，

$$\begin{aligned}
&X^1\,\mathbf{E}_1 + \cdots + X^n\,\mathbf{E}_n \\
&= x^1\,\mathbf{e}_1 + \cdots + x^n\,\mathbf{e}_n \\
&= \sum_k x^k \left(\sum_j e_k^j \mathbf{E}_j \right) \\
&= \sum_j \left(\sum_k e_k^j x^k \right) \mathbf{E}_j
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow X^j = \sum_k e_k^j x^k$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial X^j}{\partial x^i} = \sum_k e_k^j \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \sum_k e_k^j \delta^{ki} = e_i^j$$

よって，

$$(e_i^{\ 1},\ \cdots\ e_i^{\ n}) = \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^i},\ \cdots\ \frac{\partial X^n}{\partial x^i} \right)$$

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

また，後の式から，つぎの式が導かれる：

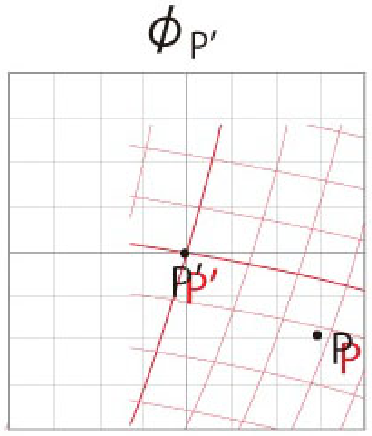
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial X^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

これが，所期の座標変換である。

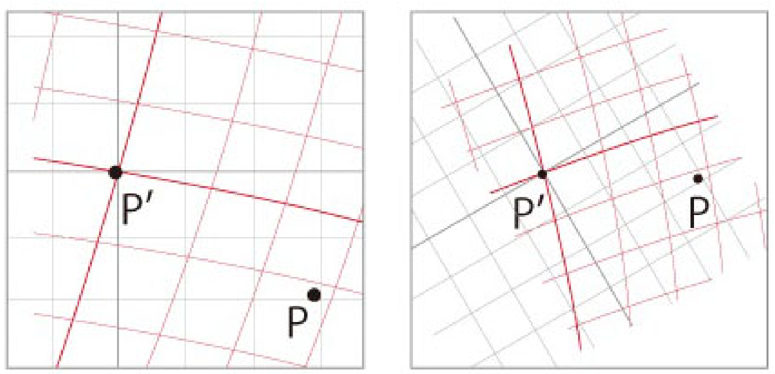
3.3　デカルト座標の変換

3.3.1「デカルト座標の変換」の意味

リーマン多様体の地図は，《地図 ϕ_P を地図 ϕ'_P から読み込む》というかたちで用いる。
結果として，ϕ'_P はデカルト座標と曲線座標の二つの座標をもつ。



常用地図帳では，同じ地域が複数の地図に表される。
縮尺を変えたり，北を指す向きを変えたりする。
これを，リーマン多様体の地図の対しても主題化しておく。
それは，「デカルト座標の変換」という内容になる。



3.3.2　デカルト座標の変換

地図のデカルト座標を，X^i 座標と称する。
この基底を，

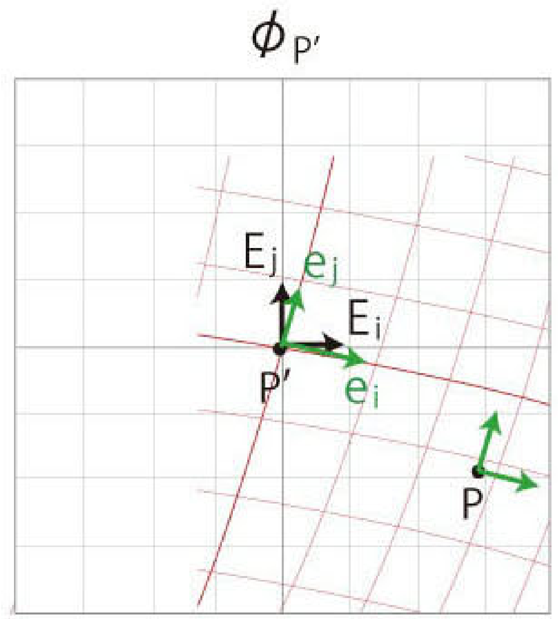
$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n\}$$

とする。

曲線座標を，x^i 座標と呼ぶ。
この基底──局所直線基底──を，

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$$

とする



つぎを，この２つの基底の変換式とする：

$$(\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) = (\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n)\begin{pmatrix} \kappa^1_1 & \cdots & \kappa^1_n \\ & \cdots & \\ \kappa^n_1 & \cdots & \kappa^n_n \end{pmatrix}$$

行列 (κ^i_j) は，つぎのように座標の変換行列になる：

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^1_1 & \cdots & \kappa^1_n \\ & \cdots & \\ \kappa^n_1 & \cdots & \kappa^n_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

このとき，

$$X^i = \sum_k \kappa^i_k \, x^k$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \sum_k \kappa^i_k \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \sum_k \kappa^i_k \, \delta^k_j = \kappa^i_j$$

結局，つぎのようになる：

$$(\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) = (\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

さらに

$$(\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n) = (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial X^n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial X^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

つぎを，$\mathbf{E}$ の基底変換とする：

$$(\mathbf{E}'_1 \ \cdots \ \mathbf{E}'_n) = (\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n) \begin{pmatrix} \gamma^1_1 & \cdots & \gamma^1_n \\ & \cdots & \\ \gamma^n_1 & \cdots & \gamma^n_n \end{pmatrix}$$

基底

$$\mathbf{E}' = \{\mathbf{E}'_1 \ \cdots \ \mathbf{E}'_n\}$$

に対応する座標を X'^i 座標と呼ぶ。

行列 (γ^i_j) は，つぎのように座標の変換行列になる：

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^1_1 & \cdots & \gamma^1_n \\ & \cdots & \\ \gamma^n_1 & \cdots & \gamma^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'^1 \\ \vdots \\ X'^n \end{pmatrix}$$

このとき，

$$X^i = \sum_k \gamma^i_k \, X'^k$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial X^i}{\partial X'^j} = \sum_k \gamma^i_k \frac{\partial X'^k}{\partial X'^j} = \sum_k \gamma^i_k \, \delta^k_j = \gamma^i_j$$

結局，つぎのようになる：

$$(\mathbf{E}'_1 \ \cdots \ \mathbf{E}'_n) = (\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial X'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial X'^n} \end{pmatrix}$$

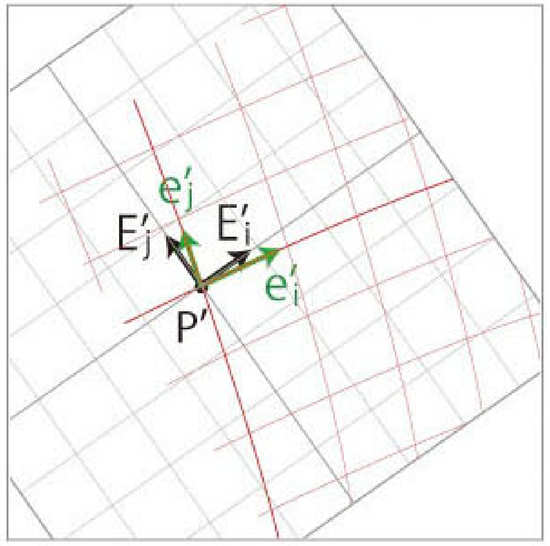
$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial X'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial X'^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'^1 \\ \vdots \\ X'^n \end{pmatrix}$$

さらに

$$(\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n) = (\mathbf{E}'_1 \ \cdots \ \mathbf{E}'_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial X'^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial X'^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X'^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial X'^n}{\partial X^n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X'^1 \\ \vdots \\ X'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X'^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial X'^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X'^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial X'^n}{\partial X^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

曲線座標はデカルト座標に固定されている格好にある。



X'^i 座標に伴う曲線座標を，x'^i 座標と呼び，これの基底——局所直線基底——を，

$$\mathbf{e}' = \{\mathbf{e}'_1 \ \cdots \ \mathbf{e}'_n\}$$

とする。

よって，

$$(\mathbf{e}'_1 \ \cdots \ \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{E}'_1 \ \cdots \ \mathbf{E}'_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial X'^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X'^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X'^1 \\ \vdots \\ X'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X'^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X'^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial X'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x'^n}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial X'^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'^1 \\ \vdots \\ X'^n \end{pmatrix}$$

そしてこれより，

$$(\mathbf{e}'_1 \ \cdots \ \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{E}'_1 \ \cdots \ \mathbf{E}'_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial X'^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X'^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial X'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial X'^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial X'^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X'^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X'^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial X^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_k \frac{\partial X^1}{\partial X'^k}\frac{\partial X'^k}{\partial x'^1} & \cdots & \sum_k \frac{\partial X^1}{\partial X'^k}\frac{\partial X'^k}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \sum_k \frac{\partial X^n}{\partial X'^k}\frac{\partial X'^k}{\partial x'^1} & \cdots & \sum_k \frac{\partial X^n}{\partial X'^k}\frac{\partial X'^k}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial X^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} \sum_k \frac{\partial x^1}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x'^1} & \cdots & \sum_k \frac{\partial x^1}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \sum_k \frac{\partial x^n}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x'^1} & \cdots & \sum_k \frac{\partial x^n}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

3.3.3　共変座標

ここでは，「共変座標」の概念を導入する。

つぎを，デカルト座標の２つの基底とする：

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1,\ \cdots,\ \mathbf{E}_n\}$$
$$\mathbf{E}' = \{\mathbf{E}'_1,\ \cdots,\ \mathbf{E}'_n\}$$

そして，これに対する座標を，それぞれ X^i, X'^i 座標と呼ぶ。
つぎを，それぞれ X^i, X'^i 座標に伴う曲線座標の基底――局所直線基底――とする：

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n\}$$
$$\mathbf{e}' = \{\mathbf{e}'_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}'_n\}$$

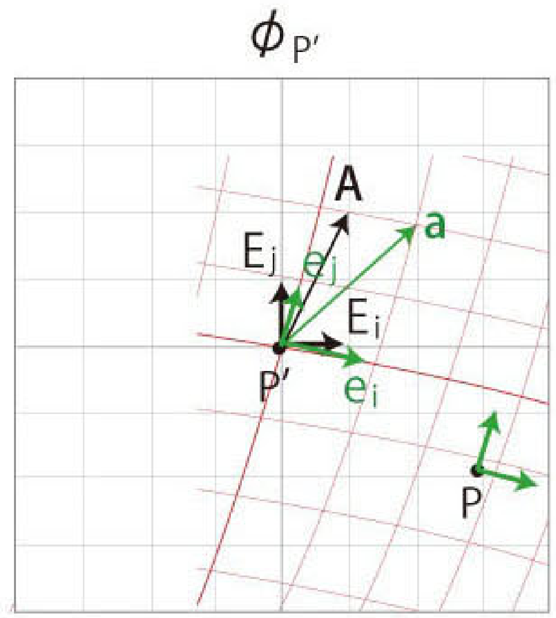
そして，これに対する座標を，それぞれ x^i, x'^i 座標と呼ぶ。

これらの間には，つぎの関係が成り立つ：

$$(\mathbf{E}'_1\ \cdots\ \mathbf{E}'_n) = (\mathbf{E}_1\ \cdots\ \mathbf{E}_n)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial X'^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^1}{\partial X'^n} \\ & \cdots & \\ \dfrac{\partial X^n}{\partial X'^1} & \cdots & \dfrac{\partial X^n}{\partial X'^n} \end{pmatrix}$$

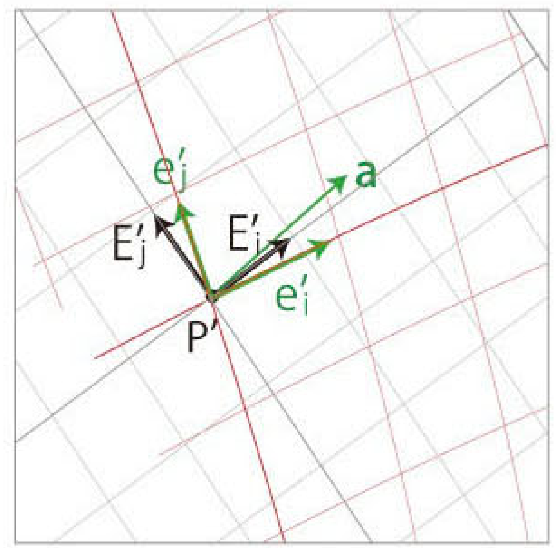
$$(\mathbf{e}'_1\ \cdots\ \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1\ \cdots\ \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

つぎは，ϕ_P 上での ベクトル $\mathbf{A}$ の平行移動 $P \to P'$ を，ϕ'_P から読み込んだものである。



(図中の $\mathbf{A}$ は，ϕ_P での A を，そのデカルト座標を以て，ϕ'_P で再現したもの)

またつぎは，デカルト座標の基底を変換したものである：



デカルト座標とこれに伴う曲線座標のそれぞれに対する $\mathbf{a}$ の座標を，つぎのように定める：

$A_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_i$　：$\mathbf{E}$ に対する座標
$A'_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}'_i$　：$\mathbf{E}'$ に対する座標
$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$　：$\mathbf{e}$ に対する座標
$a'_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_i$　：$\mathbf{e}'$ に対する座標

ここで，座標の表記が，添字が下付けになっている。
理由は，これらの座標が「基底変換と共変」と特徴づけられるものになるからである。

このことを，以下に示す。

---

(1)　$\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ に対する $A_i \to A'_i$

このとき

$$A'_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}'_i = \mathbf{a} \cdot \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial X'^j} \mathbf{E}_j = \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial X'^j} \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_j$$

$$= \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial X'^j} A_j$$

即ち，$\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$:

$$(\mathbf{E}'_1 \ \cdots \ \mathbf{E}'_n) = (\mathbf{E}_1 \ \cdots \ \mathbf{E}_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial X'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial X'^n} \end{pmatrix}$$

と $A_i \to A'_i$:

$$(A'_1 \ \cdots \ A'_n) = (A_1 \ \cdots \ A_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial X'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial X'^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial X'^n} \end{pmatrix}$$

が共変である。

---

(2)　$\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ に対する $a_i \to a'_i$

$\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ には $\mathbf{e} \to \mathbf{e}'$ が随う。
そしてこのとき，

$$a'_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{a} \cdot \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \mathbf{e}_j = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j$$

$$= \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a_j$$

即ち，$\mathbf{e} \to \mathbf{e}'$

$$(\mathbf{e}'_1 \ \cdots \ \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

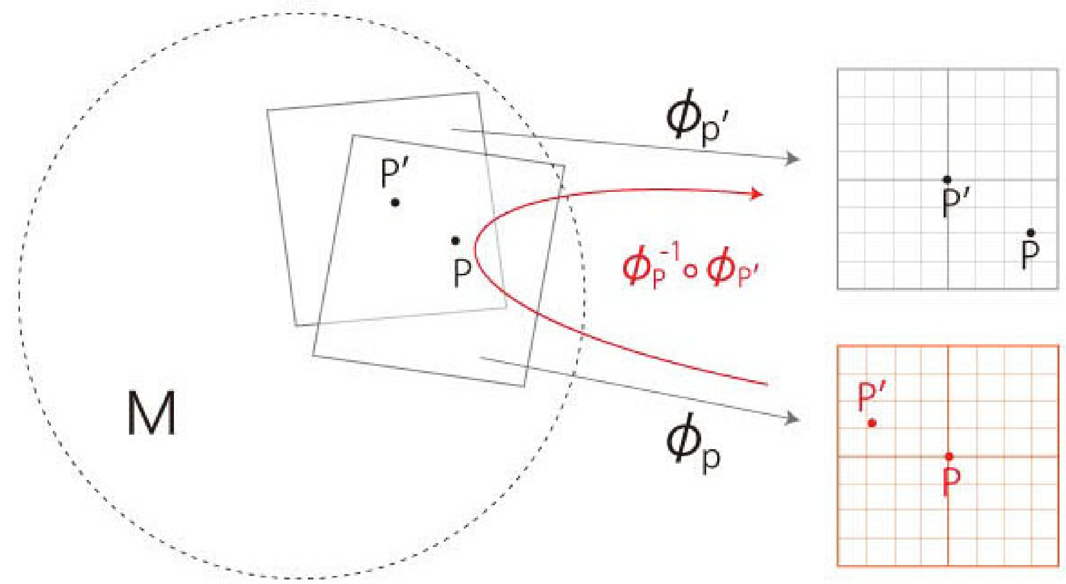
と $a_i \to a'_i$:

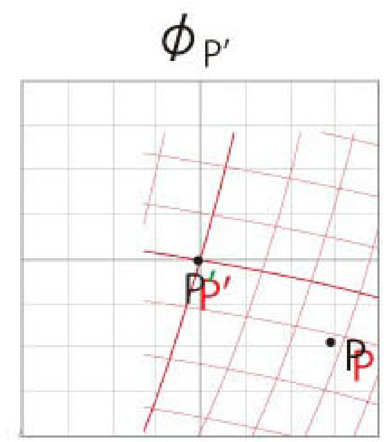
$$(a'_1 \ \cdots \ a'_n) = (a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

が共変である。

3.4　接続

3.4.1　地図の接続



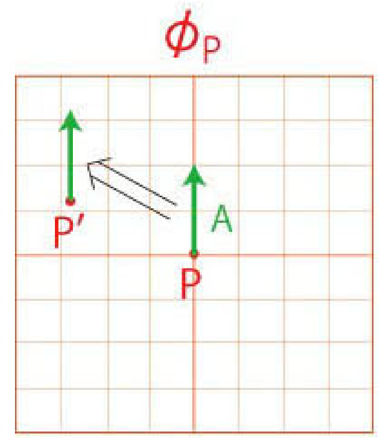


地図 $\phi_{P'}$ への地図 ϕ_P の読み込み は，地図 $\phi_{P'}$ への地図 ϕ_P の接続である。
リーマン多様体の地図帳は，地図を接いで使うものになる。

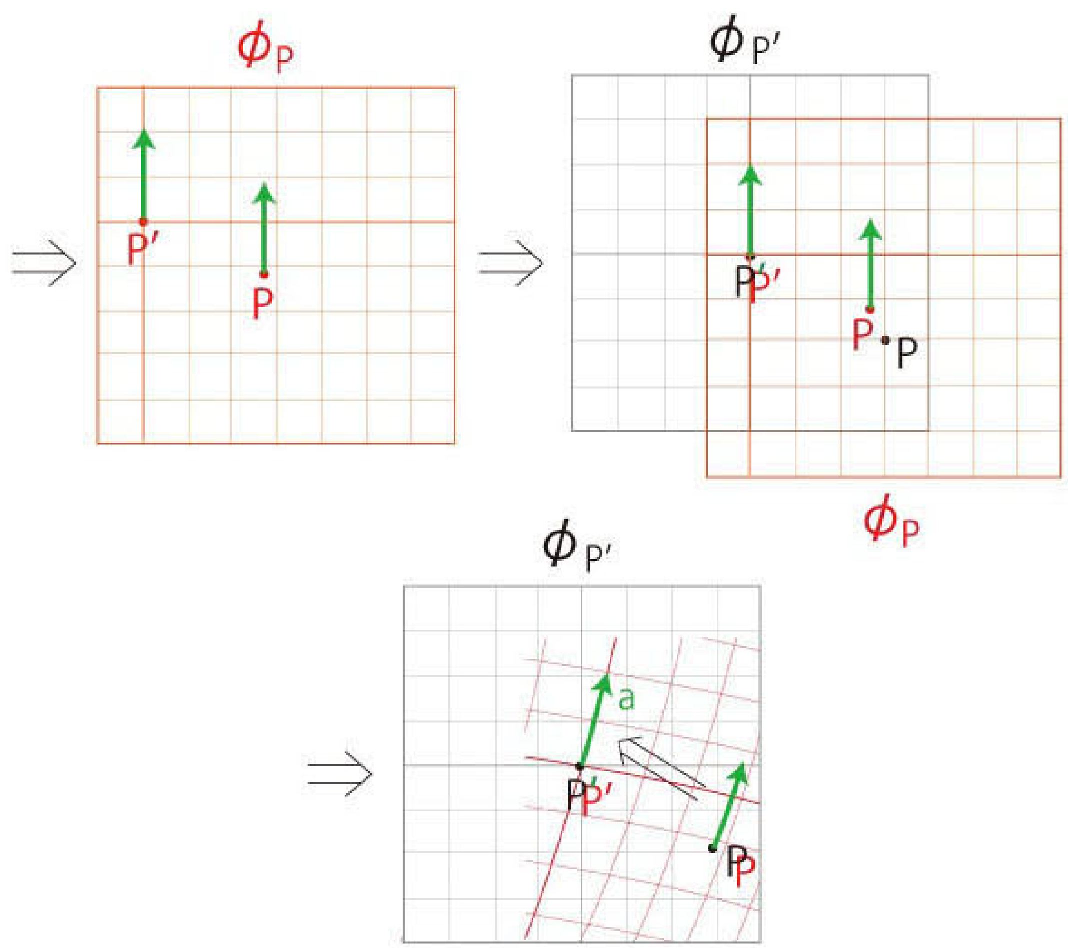
3.4.2　ベクトルの平行移動

「地図の接続」や「微分」の概念の導出では，ここで示す「ベクトルの平行移動」が方法になる。

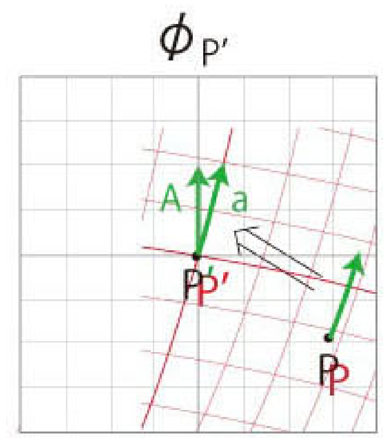
ϕ_P の上で，ベクトル $\mathbf{A}$ をつぎのように平行移動する：



ϕ_P を $\phi_{P'}$ に読み込む：



このとき，ベクトル $\mathbf{A}$ に対し，$\mathbf{a}$ はどのくらい平行関係からずれているか？



$\phi_{P'}$ のデカルト座標と曲線座標を，それぞれ X^i, x^i で表す。
二つの座標は，つぎのように変換される（☞「座標変換式」）：

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

X^i 座標の基底と x^i 座標の基底を，それぞれ

$$\{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n\}$$
$$\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$$

とすると，

$$(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}$ の X^i 座標と x^i 座標を，それぞれ

$$A_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_i$$
$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$$

とする。──ここで添字が下付けなのは，共変座標だから（☞「共変座標」）。

備考：$\mathbf{a}$ の x^i 座標 a_i は，$\mathbf{A}$ の X^i 座標と等しい。

このとき

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{a} \cdot \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \mathbf{E}_j = \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_j$$

$$= \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} A_j$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

3.4.3　基底の接続

リーマン多様体では，各点 P に対する地図 ϕ_P が所与である。
ふつう，所与性には「任意性」の意味を重ねてしまう。
しかしリーマン多様体の場合は，写像 $\phi_{P'} \circ \phi_P{}^{-1}$ に対する「C^r 級」の条件から，
地図は，これらの相互関係において，それなりに法則性を現してくることになる。

「リーマン多様体」の学習は，ここで述べる内容の学習が正念場である。
実際，「リーマン多様体」のテクストは，どれもこれも，アブストラクトな表現に終始して，肝心の意味を述べられない。
＜わかったつもり＞＜わかったふり＞で過ごしている，というわけである。

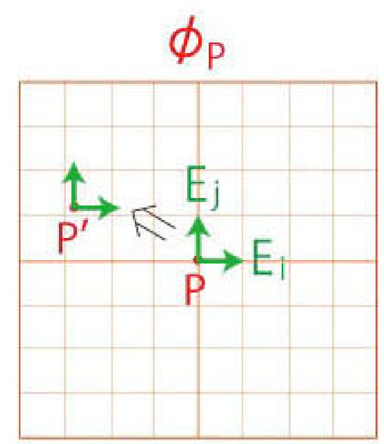
ここでは，つぎのことを調べる：

「＜地図を接ぐ＞において，曲線座標の基底はどのよう変化していくか」

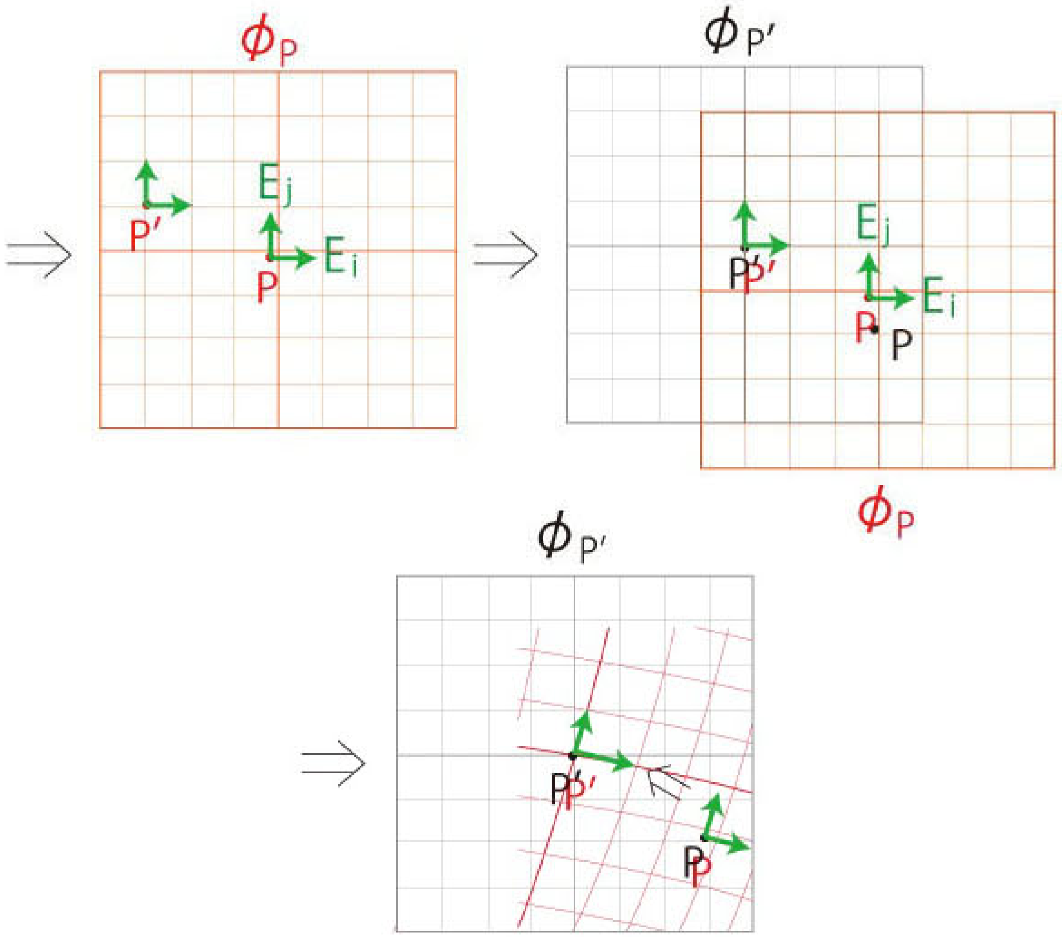
ϕ_P の上で，デカルト座標の基底

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n\}$$

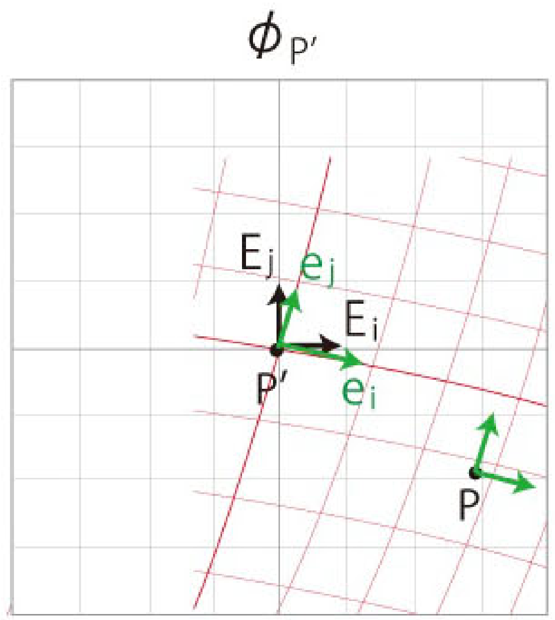
を，P から P' に平行移動する：



$\phi_{P'}$ に ϕ_P を読み込む：



つぎのように記号をふる：



$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ は，曲線座標の基底――局所直線基底――である。

基底 $\mathbf{e}$ に対する座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ と基底 $\mathbf{E}$ に対する座標 $(X_1, \cdots, X_n)$ は，つぎの式で変換される（☞「座標変換」）：

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial X^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

特に，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \cdots & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \mathbf{E}_j$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \cdots & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial X^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial X^n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial X^i} \mathbf{e}_j$$

である。

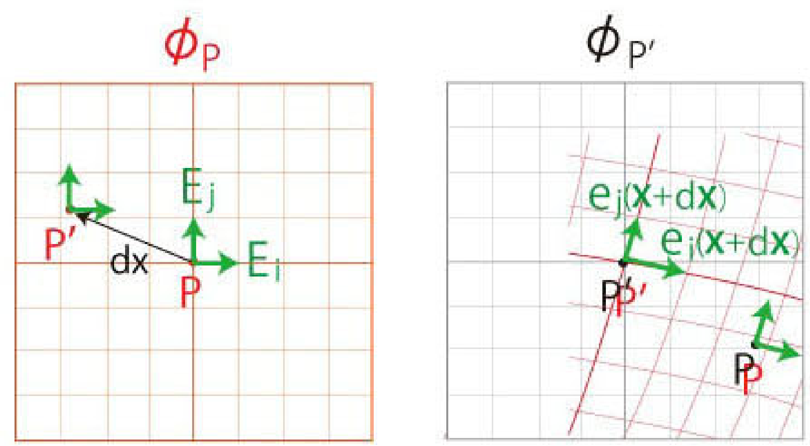
いま，ϕ_P 上の基底 $\mathbf{E}$ の平行移動 $P \to P'$ を，

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} + d\mathbf{x}$$

と見ることにより，$\phi_{P'}$ の曲線座標の基底 $\mathbf{e}$ を

$$\mathbf{e}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \{\mathbf{e}_1(\mathbf{x} + d\mathbf{x}), \cdots, \mathbf{e}_n(\mathbf{x} + d\mathbf{x})\}$$

と見る。



以下，$\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ の微分，即ち

$$de_i(\mathbf{x}) = e_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - e_i(\mathbf{x})$$

を，計算する。
ここで「計算」の意味は，「基底 $\mathbf{E}$ ――デカルト座標の基底――に対する表現に直す」である。

基底 $\mathbf{E}$ に対する $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$，$d\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ の座標を，それぞれ

$$(e_i^1, \cdots, e_i^n)$$
$$(de_i^1, \cdots, de_i^n)$$

とする。――即ち，

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = e_i^1\,\mathbf{E}_1 + \cdots + e_i^n\,\mathbf{E}_n$$
$$d\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = de_i^1\,\mathbf{E}_1 + \cdots + de_i^n\,\mathbf{E}_n$$

このとき，

$$\begin{aligned} e_i^p &= \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_p \\ &= \left(\sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \mathbf{E}_j \right) \cdot \mathbf{E}_p \\ &= \sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} (\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_p) \\ &= \sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \delta_{jp} \\ &= \frac{\partial X^p}{\partial x^i} \end{aligned}$$

これの微分をとる：

$$\begin{aligned} de_i^p &= d\left(\frac{\partial X^p}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial X^p}{\partial x^i} \right) dx^l \\ &= \sum_l \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^l x^i} dx^l \\ &= \sum_l \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^l x^i} \left(\sum_m \frac{\partial x^l}{\partial X^m} dX^m \right) \\ &= \sum_l \sum_m \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^l x^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^m} dX^m \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_i &= \sum_p de_i^p\,\mathbf{E}_p \\ &= \sum_p \left(\sum_l \sum_m \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^l x^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^m} dX^m \right) \left(\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial X^p} \mathbf{e}_j \right) \\ &= \sum_m \sum_j \left(\sum_p \sum_l \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^l x^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^m} \frac{\partial x^j}{\partial X^p} \right) \mathbf{e}_j\, dX^m \end{aligned}$$

ここで，

$$\Gamma^j_{im} = \sum_p \sum_l \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^l x^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^m} \frac{\partial x^j}{\partial X^p}$$

とおいて，つぎをまとめとする：

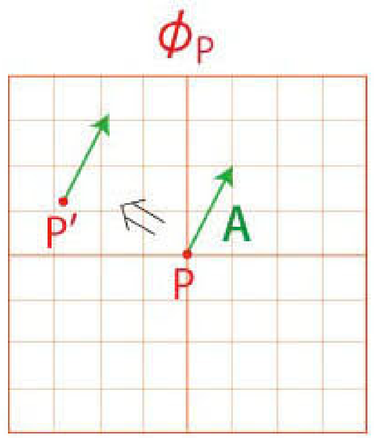
> 基底 $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{e}_1(\mathbf{x}), \cdots, \mathbf{e}_n(\mathbf{x})\}$ を，上記のように定める。
> このとき，
>
> $$d\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \sum_m \sum_j \Gamma^j_{im} \mathbf{e}_j(\mathbf{x})\, dX^m$$
> $$\Gamma^j_{im} = \sum_p \sum_l \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^l x^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^m} \frac{\partial x^j}{\partial X^p}$$

3.4.4　座標の接続

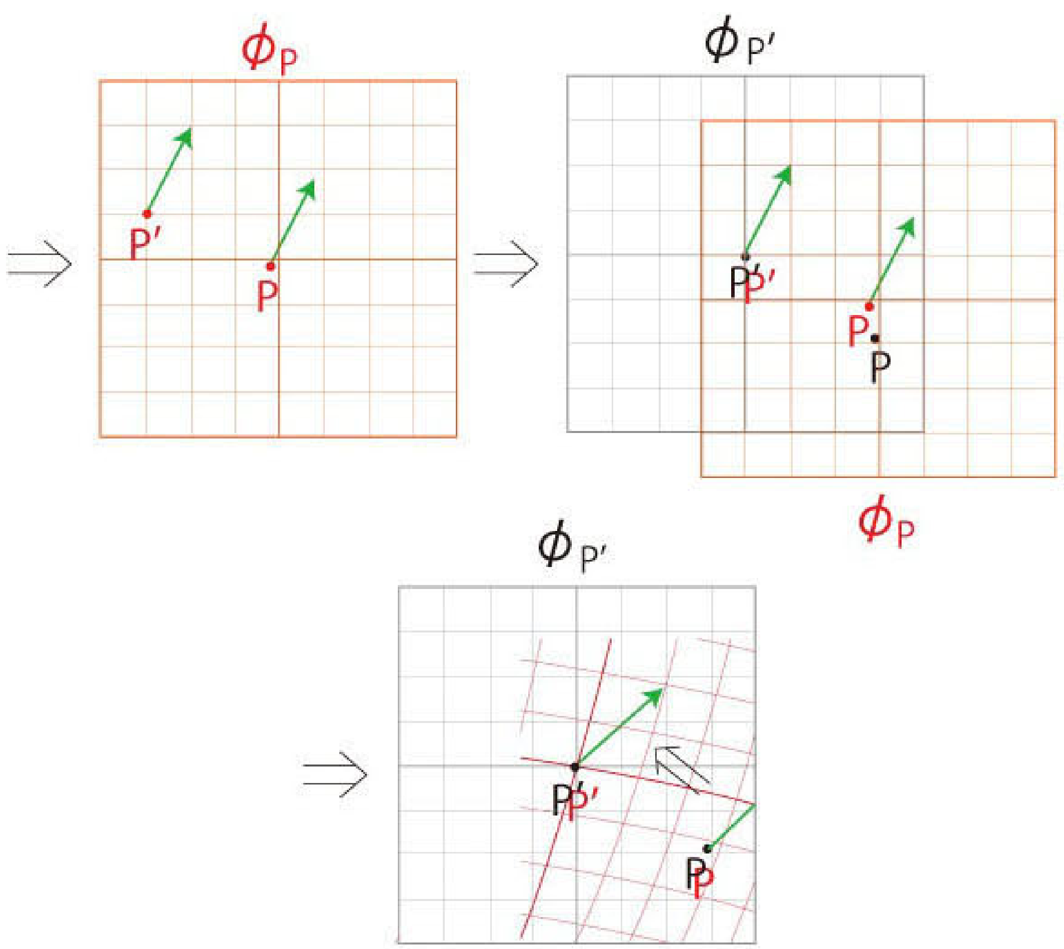
ここでは，つぎのことを調べる：

「＜地図を接ぐ＞において，曲線座標はどのよう変化していくか」

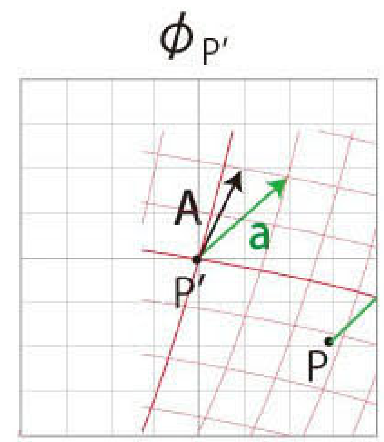
ϕ_P の上で，ベクトル $\mathbf{A}$ を P から P' に平行移動する：

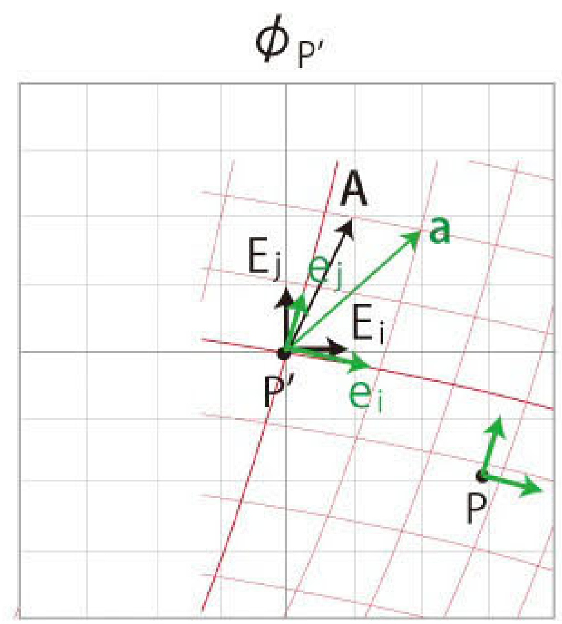


$\phi_{P'}$ に ϕ_P を読み込む：



つぎのように記号をふる：





この平行移動を連続の相で見る。

即ち，$\phi_{P'}$ の x^i 座標の基底 $\mathbf{e}$ を

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{e}_1(\mathbf{x}), \cdots, \mathbf{e}_n(\mathbf{x})\}$$

と見る。
ベクトル $\mathbf{a}$ を $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ と見る。
そして，$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ を，$d\mathbf{x}$ だけ平行移動する。

その移動先の点 P'' の地図 $\phi_{P''}$ を開いて，$\phi_{P'}$ を読み込む。
x^i 座標の基底を

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \{\mathbf{e}_1(\mathbf{x}+d\mathbf{x}), \cdots, \mathbf{e}_n(\mathbf{x}+d\mathbf{x})\}$$

と見る。
そして，$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ の像を，$\mathbf{a}(\mathbf{x}+d\mathbf{x})$ と見る。

この設定で，「$d\mathbf{x}$ に対する $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ の座標の変化」を考える。

「$d\mathbf{x}$ に対する $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ の座標の変化」は，つぎのものを考える：

$$\begin{aligned} da_i(\mathbf{x}) &= a_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - a_i(\mathbf{x}) \\ a_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \\ a_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) \\ &(i = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

Cf. $\mathbf{a}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i(\mathbf{x})$

ここで，座標の表記が添字を下付けにした「a_i」なのは，「共変座標」だからである。（☞「共変座標」）

$da_i(\mathbf{x})$ を計算する：

$$\begin{aligned} da_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - a_i(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{e}_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - \mathbf{e}_i(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \left(\sum_m \sum_j \Gamma^j_{im} \mathbf{e}_j(\mathbf{x})\, dX^m \right) \\ &= \sum_m \sum_j \Gamma^j_{im} \left(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j(\mathbf{x}) \right) dX^m \\ &= \sum_m \sum_j \Gamma^j_{im}\, a_j(\mathbf{x})\, dX^m \end{aligned}$$

（☞「基底の接続」）

まとめ

$$a_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x}) + \sum_m \sum_j \Gamma^j_{im}\, a_j(\mathbf{x})\, dX^m$$

3.4.5 クリストッフェル記号 Γ^k_{ij}

記号 Γ^k_{ij}

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l \sum_m \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^l \partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^j} \frac{\partial x^k}{\partial X^m}$$

の導入によって，「基底の接続」と「座標の接続」がつぎのように表現されることになった：

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) &= \sum_j \sum_k \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k(\mathbf{x})\, dX^j \\ da_i(\mathbf{x}) &= a_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - a_i(\mathbf{x}) \\ &= \sum_j \sum_k \Gamma^k_{ij}\, a_k(\mathbf{x})\, dX^j \end{aligned}$$

Γ^k_{ij} を，「クリストッフェルの三指標記号」と呼ぶ。
また，「接続」の文脈を以て，「接続係数」と呼ぶ。

III　解析

4　空間の曲がり

4.1　共変微分

4.1.1　共変微分

ベクトル $\mathbf{A}$ の平行移動から，つぎの関係を導いた（☞「座標の接続」）：：

$$a_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x}) + \sum_m \sum_k \Gamma^k_{im}\, a_k(\mathbf{x})\, dX^m$$

これより

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial X^j} a_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \\
&= \frac{\partial}{\partial X^j}\left(a_i(\mathbf{x}) + \sum_m \sum_k \Gamma^k_{im}\, a_k(\mathbf{x})\, dX^m \right) \\
&= \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial X^j} + \sum_m \sum_k \Gamma^k_{im}\, a_k(\mathbf{x})\, \frac{\partial X^m}{\partial X^j} \\
&= \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial X^j} + \sum_m \sum_k \Gamma^k_{im}\, a_k(\mathbf{x})\, \delta_{jm} \\
&= \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial X^j} + \sum_k \Gamma^k_{ij}\, a_k(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

これを，$\nabla_j a_i(\mathbf{x})$ で表し，$a_i(\mathbf{x})$ の「共変微分」と呼ぶ：

$$\nabla_j a_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial X^j} + \sum_k \Gamma^k_{ij}\, a_k(\mathbf{x})$$

「共変微分」の「共変」は，a_i ないし ∇_j が「共変」と特徴づけられることによる。

☞ 共変座標
☞ 共変テンソル ∇_j

4.1.2　共変テンソル

$\nabla_j a_i(\mathbf{x})$ をつぎのように定義し，これを「共変微分」と呼ぶとした：

$$\nabla_j a_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial X^j} + \sum_k \Gamma^k_{ij}\, a_k(\mathbf{x})$$

「共変」の語は，この形式が基底変換に対して共変だということを示していることになる。
実際，つぎが成り立つ：

$$\begin{aligned}\nabla'_j a'_i &= \frac{\partial a'_i}{\partial X'^j} - \sum_k \Gamma'^k_{ij} a'_k \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial X^k}{\partial X'^j} \nabla_k a_l\end{aligned}$$

以下，これの計算過程を示す。

計算(1)

$$a'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j$$

（☞「共変座標」）

計算(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial a'_i}{\partial X'^j} &= \frac{\partial}{\partial X'^j}\left(\sum_l \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} a_l \right) \\ &= \sum_l \left(\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial X'^j} a_l + \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial a_l}{\partial X'^j} \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial X'^j} a_l + \sum_l \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \left(\sum_k \frac{\partial X^k}{\partial X'^j} \frac{\partial a_l}{\partial X^k} \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial X'^j} a_l + \sum_{k,l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial X^k}{\partial X'^j} \frac{\partial a_l}{\partial X^k} \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial X^k}{\partial X'^j} \frac{\partial a_l}{\partial X^k} + \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial X'^j} a_l\end{aligned}$$

計算(3)

$$\Gamma'^k_{ij} = \sum_{s,v,w} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial X^v}{\partial X'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial X^w} \Gamma^w_{sv} + \sum_s \frac{\partial x'^k}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial X'^j \partial x'^i}$$

を示す：

$$\Gamma'^k_{ij} = \sum_l \sum_m \frac{\partial^2 X'^m}{\partial x'^l \partial x'^i} \frac{\partial x'^l}{\partial X'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial X'^m}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X'^m}{\partial x'^l \partial x'^i} &= \frac{\partial}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial x'^i} \\ &= \sum_u \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial}{\partial x^u} \left(\sum_t \frac{\partial X^t}{\partial x'^i} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \right) \\ &= \sum_u \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial}{\partial x^u} \left(\sum_t \left(\sum_s \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial X^t}{\partial x^s} \right) \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \right) \\ &= \sum_{s,t,u} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial}{\partial x^u} \left(\frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial X^t}{\partial x^s} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \right) \\ &= \sum_{s,t,u} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \frac{\partial}{\partial x^u} \left(\frac{\partial X^t}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \right) \\ &= \sum_{s,t,u} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \left(\frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u \partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} + \frac{\partial X^t}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^u \partial x'^i} \right) \\ &= \sum_{s,t,u} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u \partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} + \sum_{s,t,u} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \frac{\partial X^t}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^u \partial x'^i} \\ &= \sum_{s,t,u} \frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u \partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} + \sum_s \left(\sum_u \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial}{\partial x^u} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \right) \left(\sum_t \frac{\partial X^t}{\partial x^s} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \right) \\ &= \sum_{s,t,u} \frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u \partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} + \sum_s \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^l \partial x'^i} \frac{\partial X'^m}{\partial x^s}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x'^l}{\partial X'^j} = \sum_v \frac{\partial X^v}{\partial X'^j} \frac{\partial x'^l}{\partial X^v}$$

$$\frac{\partial x'^k}{\partial X'^m} = \sum_w \frac{\partial X^w}{\partial X'^m} \frac{\partial x'^k}{\partial X^w}$$

よって，

$$\Gamma'^k_{ij} = \sum_l \sum_m \frac{\partial^2 X'^m}{\partial x'^l \partial x'^i} \frac{\partial x'^l}{\partial X'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial X'^m}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{l,m,s,t,u,v,w} \left(\frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u \partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial x^u}{\partial x'^l} \frac{\partial X'^m}{\partial X^t} \right) \left(\frac{\partial X^v}{\partial X'^j} \frac{\partial x'^l}{\partial X^v} \right) \left(\frac{\partial X^w}{\partial X'^m} \frac{\partial x'^k}{\partial X^w} \right) \\ &+ \sum_{l,m,s} \left(\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^l \partial x'^i} \frac{\partial X'^m}{\partial x^s} \right) \frac{\partial x'^l}{\partial X'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial X'^m}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s,t,u,v,w} \frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u \partial x^s} \left(\sum_l \frac{\partial x^u}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial X^v}\right)\left(\sum_m \frac{\partial X^w}{\partial X'^m}\frac{\partial X'^m}{\partial X^t}\right)\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial X^w} \\
&+ \sum_s \left(\sum_l \frac{\partial x'^l}{\partial X'^j}\frac{\partial}{\partial x'^l}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\right)\left(\sum_m \frac{\partial X'^m}{\partial x^s}\frac{\partial x'^k}{\partial X'^m}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s,t,u,v,w} \frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u\partial x^s}\frac{\partial x^u}{\partial X^v}\frac{\partial X^w}{\partial X^t}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial X^w} \\
&+ \sum_s \frac{\partial^2 x^s}{\partial X'^j\partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s,v,w}\left(\sum_{t,u}\frac{\partial^2 X^t}{\partial x^u\partial x^s}\frac{\partial x^u}{\partial X^v}\frac{\partial X^w}{\partial X^t}\right)\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial X^w} \\
&+ \sum_s \frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial X'^j\partial x'^i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s,v,w}\Gamma^w_{sv}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial X^w} \\
&+ \sum_s \frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial X'^j\partial x'^i}
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{s,v,w}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial X^w}\Gamma^w_{sv} + \sum_s \frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial X'^j\partial x'^i}
$$

計算(4)

計算 (3) と(1) より，

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \Gamma'^k_{ij} a'_k \\
&= \sum_k \left(\sum_{s,v,w}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial X^w}\Gamma^w_{sv} + \sum_s \frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial X'^j \partial x'^i}\right)\left(\sum_q \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} a_q\right) \\
&= \sum_{s,v,w,q}\left(\sum_k \frac{\partial x'^k}{\partial X^w}\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}\right)\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\Gamma^w_{sw} a_q + \sum_{q,s}\left(\sum_k \frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}\right)\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^i\partial X'^j} a_q \\
&= \sum_{s,v,w,q}\frac{\partial x^q}{\partial X^w}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\Gamma^w_{sw}a_q + \sum_{q,s}\frac{\partial x^q}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^i\partial X'^j}a_q \\
&= \sum_{s,v,w}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\Gamma^w_{sw}\left(\sum_q \frac{\partial x^q}{\partial X^w}a_q\right) + \sum_s \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^i\partial X'^j}\left(\sum_q\frac{\partial x^q}{\partial x^s}a_q\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s,v,w}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\Gamma^w_{sw}a_w + \sum_s \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^i\partial X'^j}a_s \\
&= \sum_{s,v}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial X^v}{\partial X'^j}\left(\sum_w \Gamma^w_{sk}a_w\right) + \sum_s \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^i\partial X'^j}a_s
\end{aligned}
$$

計算(5)

計算(2) と (4) より，

$$
\begin{aligned}
\nabla'_j a'_i &= \frac{\partial a'_i}{\partial X'^j} - \sum_t \Gamma'^k_{ij}a'_k \\
&= \sum_{k,l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial X^k}{\partial X'^j}\frac{\partial a_l}{\partial X^k} + \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i\partial X'^j}a_l \\
&\quad - \left(\sum_{k,l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial X^k}{\partial X'^j}\left(\sum_p\Gamma^p_{lk}a_p\right) + \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i\partial X'^j}a_l\right) \\
&= \sum_{k,l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial X^k}{\partial X'^j}\left(\frac{\partial a^l}{\partial X^k} - \sum_p \Gamma^p_{lk}a_p\right) \\
&= \sum_{k,l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial X^k}{\partial X'^j}\nabla_k a_l
\end{aligned}
$$

4.2　曲率

4.2.1 「リーマン曲率」の主題の意味

「リーマン多様体」は，「空間の歪み」を主題化しようとする「多様体」である。
このときの「空間の歪み」は，「歪みが目に見えない歪み」である。

「歪みが目に見えない」の意味は，
　　「歪みは，＜別の場所に移動し，そして行程を省みる＞によって現れるもの」
である。

「リーマン多様体」は，超越論である。
目に見える歪み――球面，円筒面の類――は，「リーマン多様体」の内容になるものではない。
それは，ユークリッド幾何学ないし通常の多様体論の内容である。

「空間の歪み」を計量する形式は，「曲率」である。
「空間の歪み」を主題化しようとする「リーマン多様体」は，「曲率」が中心主題である。

4.2.2「曲率」導出のアイデア

「リーマン多様体の曲率」というものを考える。
さて，これはどんなふうに定義できるものになるか？

リーマン多様体の曲率は，「リーマン多様体 M の点 P における曲率」として定義する。

地図 ϕ_P の上で，ベクトル $\mathbf{A}$ をとる。
これを，P を出発点にして，地図を接ぎつつ，平行移動（☞「平行移動」）で単純曲線を一周させる：

1. 地図 ϕ_P 上で，$\mathbf{A}$ を P から微小移動する。
2. 移動先 P_1 の地図 ϕ_{P_1} を開き，ϕ_P を読み込む。
   $\mathbf{A}$ の像のベクトルを，$\mathbf{a}_1$ とする。
   ϕ_{P_1} 上で $\mathbf{a}_1$ を微小移動する。
3. 移動先 P_2 の地図 ϕ_{P_2} を開き，ϕ_{P_1} を読み込む。
   そして上と同様のことをする。
4. この手順を繰り返して，最後の点 P_n から P に戻る。
   ϕ_P を開き，ϕ_{P_n} を読み込む。
   $\mathbf{a}_n$ の像 $\mathbf{A}'$ を得る。

このとき，《宇宙旅行すると，地球に戻ってきたとき，自分の時計が地球の時計より遅れている》のように，$\mathbf{A}'$ がもとの $\mathbf{A}$ からズレることが見込まれる。
このズレを以て，「リーマン多様体 M の点 x における曲率」を定義しようというのである。

註：平行移動での＜地図を接ぐ＞は，ズレをつくろうとしてわざとやっているのではない。
「リーマン多様体」の趣旨では，一つの地図は「地図として機能する領域は微小」と考えるものになる。
「移動」は，「地図を接ぐ」を以て成ることなのである，

4.2.3　曲率 R^i_{jkl}

「曲率」導出のアイデアを，実行に移すとする。
定義しようとするのは，リーマン多様体 M の「点 P における曲率」である。

「リーマン多様体」のテクストには，つぎの方法が書かれている：

1. つぎのように設定する：
   $P \to Q \quad (+d\mathbf{x})$
   　ϕ_P を開き，ベクトル $\mathbf{A}$ を P に置く。
   　$\mathbf{A}$ を Q まで平行移動。
   $Q \to R \quad (+d\mathbf{y})$
   　ϕ_Q を開き，ϕ_P を読み込む。
   　$\mathbf{A}$ の像を，$\mathbf{a}(Q)$ とする。
   　$\mathbf{a}(Q)$ を R まで平行移動。
   $R \to S \quad (-d\mathbf{x})$
   　ϕ_R を開き，ϕ_Q を読み込む。
   　$\mathbf{a}(Q)$ の像を，$\mathbf{a}(R)$ とする。
   　$\mathbf{a}(R)$ を S まで平行移動。
   $S \to P \quad (-d\mathbf{y})$
   　ϕ_S を開き，ϕ_R を読み込む。
   　$\mathbf{a}(R)$ の像を，$\mathbf{a}(S)$ とする。
   　$\mathbf{a}(S)$ を P まで平行移動。
   P
   　ϕ_P を開き，ϕ_S を読み込む。
   　$\mathbf{a}(S)$ の像を，$\mathbf{A}'$ とする。
2. $\mathbf{A}' - \mathbf{A}$ を計算する。
3. この値を＜一周で囲んだ面積＞の値 ──即ち，$dx \times dy$ ──で割って，「単位面積あたり」で表す。
   これを「曲率」と定義する

所謂「rotation」の手法である。
しかし，「リーマン多様体」にこの手法を使うのは，無理がある：

1. 「リーマン多様体」には，「$+dx \to +dy \to -dx \to -dy$ の長方形ループをつくれる」の含意は無い。。
2. 「rotation」では，《微小ループを合併し重複をキャンセルして，任意の経路を表現》の方法で「経路に依存しない」を証明する。
   しかし，「リーマン多様体」には，「このような表現が可能」の含意は無い。

「リーマン多様体」の思想は，《＜空間の内にいる＞のスタンスから，空間を知るための手探りをする》である。
単純設定から「曲率」の定義式を導き，そしてそれを単純な曲面図形に適用してみせることは，この「曲率」の概念に意味があるということにはならない。

この「無理」を踏まえた上で，以下，「曲率」の導出計算を見ていく。

（以下，アインシュタイン縮約表記を以て，Σ記号を省略）

各地図において，デカルト座標を X^i 座標，曲線座標を x^i 座標，と呼ぶ。

ϕ_P における $\mathbf{A}$ の X^i 座標を

$$(a_1, \cdots, a_n)$$

とする。

(1) ϕ_Q における $\mathbf{a}(Q)$ の x^i 座標 (☞「座標の接続」

$$a_i(Q) \;=\; a_i(P) \;+\; \Gamma^k_{ij}(P)\, a_k(P)\, dx^j$$

ここで，Γ^k_{ij} の値が場所に依存するので，$\Gamma^k_{ij}(P)$ と表した。——以下，同様。

(2) ϕ_R における $\mathbf{a}(R)$ の x^i 座標

(EMANの物理学 (「リーマン曲率」) から拝借) :

$$\begin{aligned}
a_i(R) \;&=\; a_i(Q) \;+\; \Gamma^m_{in}(Q)\, a_m(Q)\, dy^n \\
&=\; \left(a_i(P) \;+\; \Gamma^k_{ij}(P)\, a_k(P)\, dx^j\right) \\
&\quad\; +\; \Gamma^m_{in}(Q)\; \left(a_m(P) + \Gamma^k_{mj}(P)\, a_k(P)\, dx^j\right) dy^n \\
&\approx\; a_i(P) \;+\; \Gamma^k_{ij}(P)\, a_k(P)\, dx^j \\
&\quad +\; \left(\Gamma^m_{in}(P) + \frac{\partial \Gamma^m_{in}(P)}{\partial x^p} dx^p\right) \left(a_m(P) + \Gamma^k_{mj}(P) a_k(P) dx^j\right) dy^n
\end{aligned}$$

((P) を省略)

$$\begin{aligned}
&=\; a_i \;+\; \Gamma^k_{ij} a_k dx^j \\
&\quad +\; \Gamma^m_{in} a_m dy^n \;+\; \Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} a_k dx^j dy^n \\
&\quad +\; \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^p} dx^p a_m dy^n \;+\; \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^p} dx^p \Gamma^k_{mj} a_k dx^j dy^n \\
&=\; a_i \;+\; \Gamma^k_{ij} a_k dx^j \;+\; \Gamma^m_{in} a_m dy^n \\
&\qquad +\; \Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} a_k dx^j dy^n \;+\; \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^p} a_m dx^p dy^n \\
&\qquad +\; \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^p} \Gamma^k_{mj} a_k dx^j dy^n dx^p
\end{aligned}$$

(最後の項は微小量３次なので，捨てる)

$$\begin{aligned}
&\approx\; a_i \;+\; \Gamma^k_{ij} a_k dx^j \;+\; \Gamma^m_{in} a_m dy^n \\
&\qquad +\; \left(\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} a_k \;+\; \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^j} a_m\right) dx^j dy^n \\
&=\; a_i \;+\; \Gamma^k_{ij} a_k dx^j \;+\; \Gamma^m_{in} a_m dy^n \\
&\qquad +\; \left(\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j}\right) a_k dx^j dy^n
\end{aligned}$$

(3) $R \to S \to P$

この経路を，「$-(P \to S \to R)$」と見る。
経路「$P \to S \to R$」での $a_i(R)$ の式—— $a'_i(R)$ と表す——は，経路「$P \to Q \to R$」での $a_i(R)$ の式の dx, dy の記号を入れ替えたものになる：

$$\begin{aligned}
a'_i(R) \;&=\; a_i \;+\; \Gamma^k_{ij} a_k dy^j + \Gamma^m_{in} a_m dx^n \\
&\quad +\; \left(\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j}\right) a_k dy^j dx^n
\end{aligned}$$

よって，「$P \to Q \to R \to S \to P$」と一周したときの座標の変化は：

$$\begin{aligned}
&a_i(R) - a'_i(R) \\
&\quad=\; \left(\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j}\right) a_k dx^j dy^n \\
&\qquad -\; \left(\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j}\right) a_k dy^j dx^n \\
&\quad=\; \left(\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j}\right) a_k dx^j dy^n \\
&\qquad -\; \left(\Gamma^m_{ij}\Gamma^k_{mn} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^n}\right) a_k dy^n dx^j \\
&\quad=\; \left(\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j} \;-\; \Gamma^m_{ij}\Gamma^k_{mn} \;-\; \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^n}\right) a_k dx^j dy^n
\end{aligned}$$

ここで「$a_k\, dx\, dy$」を「経路が囲む面積」と見立てると，これを除した残りの

$$\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} \;+\; \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j} \;-\; \Gamma^m_{ij}\Gamma^k_{mn} \;-\; \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^n}$$

は，「単位当たり面積」ということになる。
身分として「率」である。

この「率」を「曲率」と見なし，「点 x におけるリーマン曲率」と呼ぶ。
そして，$R^k_{i,jn}$ と表す（x は「暗黙に」ということにして，特に記号には含ませない）
：

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}$$

4.2.4　共変微分からの曲率の導出

「リーマン曲率」の導出では，点 $P(\mathbf{x})$ に立てたベクトル $\mathbf{A}$ ── x^i 座標 $(a_1, \cdots, a_n)$ ──を，平行移動で経路

$$P \to Q \to R \to S \to P$$

を一巡させ，このときの座標の変化を計算した。

そのとき出て来た式

$$a_i(Q) = a_i(P) + \Gamma^k_{ij}(P)\, a_k(P)\, dx^j$$
$$a_i(R) = a_i(Q) + \Gamma^m_{in}(Q)\, a_m(Q)\, dy^n$$

は，それぞれつぎの共変微分の式と対応する：

$$\nabla_j a_i(P) = \frac{\partial a_i(P)}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij}(P)\, a_k(P)$$
$$\nabla_k a_i(Q) = \frac{\partial a_i(Q)}{\partial x^j} + \Gamma^m_{in}(Q)\, a_m(Q)$$

第２式を，「∇_j に ∇_j を合成」と見立てて，「$\nabla_k \nabla_j a_i$」と表すことにする。

経路 $P \to Q \to R \to S \to P$ を平行移動したときの座標の変化は，$P \to S \to R$ での $a_i(R)$ の式を $a'_i(R)$ としたときの，つぎの式になった：

$$a_i(R) - a'_i(R)$$

そしてこの式の計算から導出されたつぎの式を，リーマン曲率と定義したわけである：

$$\Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj} + \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^k_{mn} - \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^n}$$

式 $a_i(R) - a'_i(R)$ には，つぎの式が対応する：

$$\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k a_i$$

よって，この式もリーマン曲率の式を当然含蓄していることになる。
以下，実際に計算してみる。

（EMANの物理学（「リーマン曲率」）から拝借）：

$$\nabla_k(\nabla_j a_i) = \partial_k(\nabla_j a_i) - \Gamma^m_{jk}(\nabla_m a_i) - \Gamma^m_{ik}(\nabla_j a_m)$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_k(\partial_j a_i - \Gamma^t_{ij} a_t) \\
&\quad - \Gamma^m_{jk}(\partial_m a_i - \Gamma^t_{im} a_t) \\
&\quad - \Gamma^m_{ik}(\partial_j a_m - \Gamma^t_{mj} a_t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_k \partial_j a_i \ - \ (\partial_k \Gamma^t_{ij}) a_t \ - \ \Gamma^t_{ij}(\partial_k a_t) \\
&\quad - \Gamma^m_{jk}(\partial_m a_i - \Gamma^t_{im} a_t) \\
&\quad - \Gamma^m_{ik}\partial_j a_m \quad + \ \Gamma^m_{ik}\Gamma^t_{mj} a_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_k \partial_j a_i \ - \ (\partial_k \Gamma^t_{ij}) a_t \\
&\quad - (\Gamma^t_{ij}\partial_k a_t + \Gamma^m_{ik}\partial_j a_m) \\
&\quad - \Gamma^m_{jk}(\partial_m a_i - \Gamma^t_{im} a_t) \quad + \ \Gamma^m_{ik}\Gamma^t_{mj} a_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_k \partial_j a_i \ - \ (\partial_k \Gamma^t_{ij}) a_t \\
&\quad - (\Gamma^t_{ij}\partial_k a_t + \Gamma^t_{ik}\partial_j a_t) \\
&\quad - \Gamma^m_{jk}(\partial_m a_i - \Gamma^t_{im} a_t) \\
&\quad + \Gamma^m_{ik}\Gamma^t_{mj} a_t
\end{aligned}
$$

$\nabla_j \nabla_k a_i$ は　上式の j と k を入れ換えればよい：

$$
\begin{aligned}
\nabla_j(\nabla_k a_i) \ &= \ \partial_j \partial_k a_i \ - \ (\partial_j \Gamma^t_{ik}) a_t \\
&\quad - (\Gamma^t_{ik}\partial_j a_t + \Gamma^t_{ij}\partial_k a_t) \\
&\quad - \Gamma^m_{kj}(\partial_m a_i - \Gamma^t_{im} a_t) \\
&\quad + \Gamma^m_{ij}\Gamma^t_{mk} a_t
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&\nabla_k \nabla_j a_i - \nabla_j \nabla_k a_i \\
&\quad = \ \partial_j \Gamma^t_{ik} a_t \ - \ \partial_k \Gamma^t_{ij} a_t \ + \ \Gamma^m_{ik}\Gamma^t_{mj} a_t \ - \ \Gamma^m_{ij}\Gamma^t_{mk} a_t \\
&\quad = \ \left(\Gamma^m_{ik}\Gamma^t_{mj} + \partial_j \Gamma^t_{ik} - \partial_k \Gamma^t_{ij} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^t_{mk} \right) a_t
\end{aligned}
$$

確かに，リーマン曲率の式が含まれている。

なお，式「$\nabla_k \nabla_j a_i - \nabla_j \nabla_k a_i$」の簡約表記として，「$[\nabla_k, \nabla_j] a_i$」を用いる：

$$
[\nabla_k, \nabla_j] a_i = \ \nabla_k \nabla_j a_i - \nabla_j \nabla_k a_i
$$

4.2.5 「曲率テンソル」？

リーマン曲率は，つぎの式に収まった：

$$
[\nabla_j, \nabla_k] a_i \ = \ R^t{}_{i\,kj} \ a_t
$$

ここで，

$$
R^t{}_{i\,kj} = \sum_m \left(\Gamma^m_{ik}\Gamma^t_{mj} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^t_{mk} \right) + \partial_j \Gamma^t_{ik} - \partial_k \Gamma^t_{ij}
$$

ある者は，この式を「3 階の共変テンソル」と見る。そして「曲率テンソル」のことばを用いる。
しかしこれは，「テンソル」の語の濫用というものである。

☞『「テンソル」とは何か』

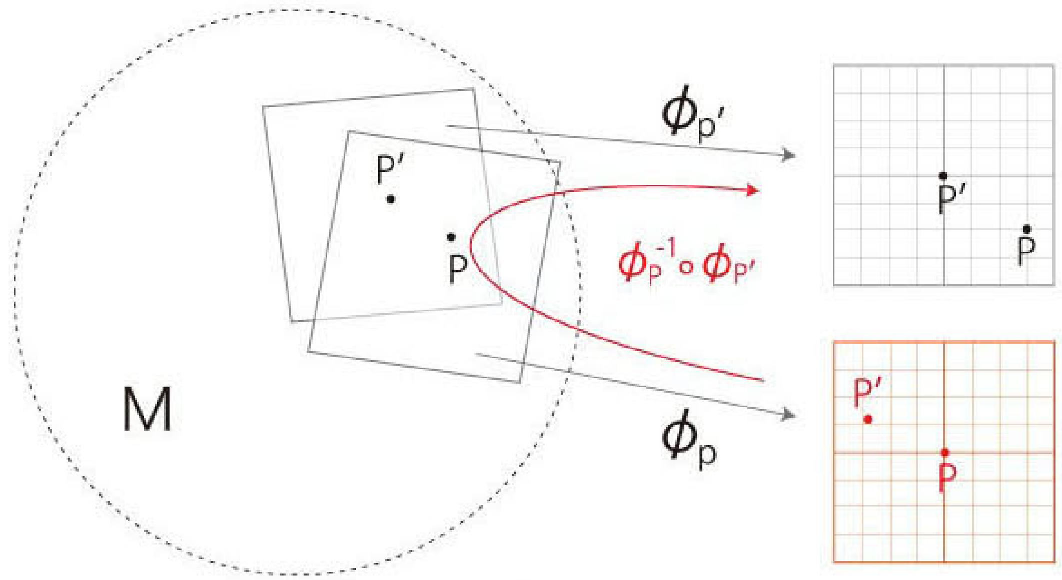
5　計量

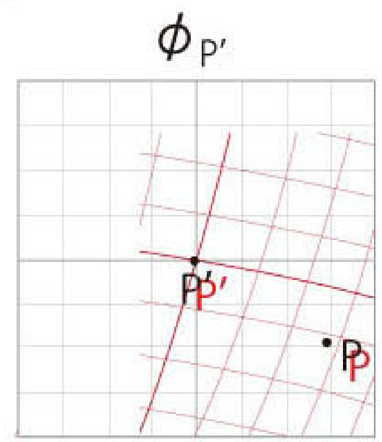
5.1 計量

5.1.1 リーマン計量 g_{ij}

リーマン多様体 M は，「曲がった空間」の主題化である。
そしてその「曲がった空間」は，つぎの形で表現されるものである。

《点 P の地図 ϕ_P を点 P' の地図 $\phi_{P'}$ に読み込むと，
ϕ_P のデカルト座標が曲線座標になって現れる》





空間が曲がっているので，距離は曲線の長さになる。
これの測度は，＜距離の微分を継ぎ足す＞を＜地図を接ぐ＞を以て行うものになる。
──測度は，＜微分＞で考えるものである。

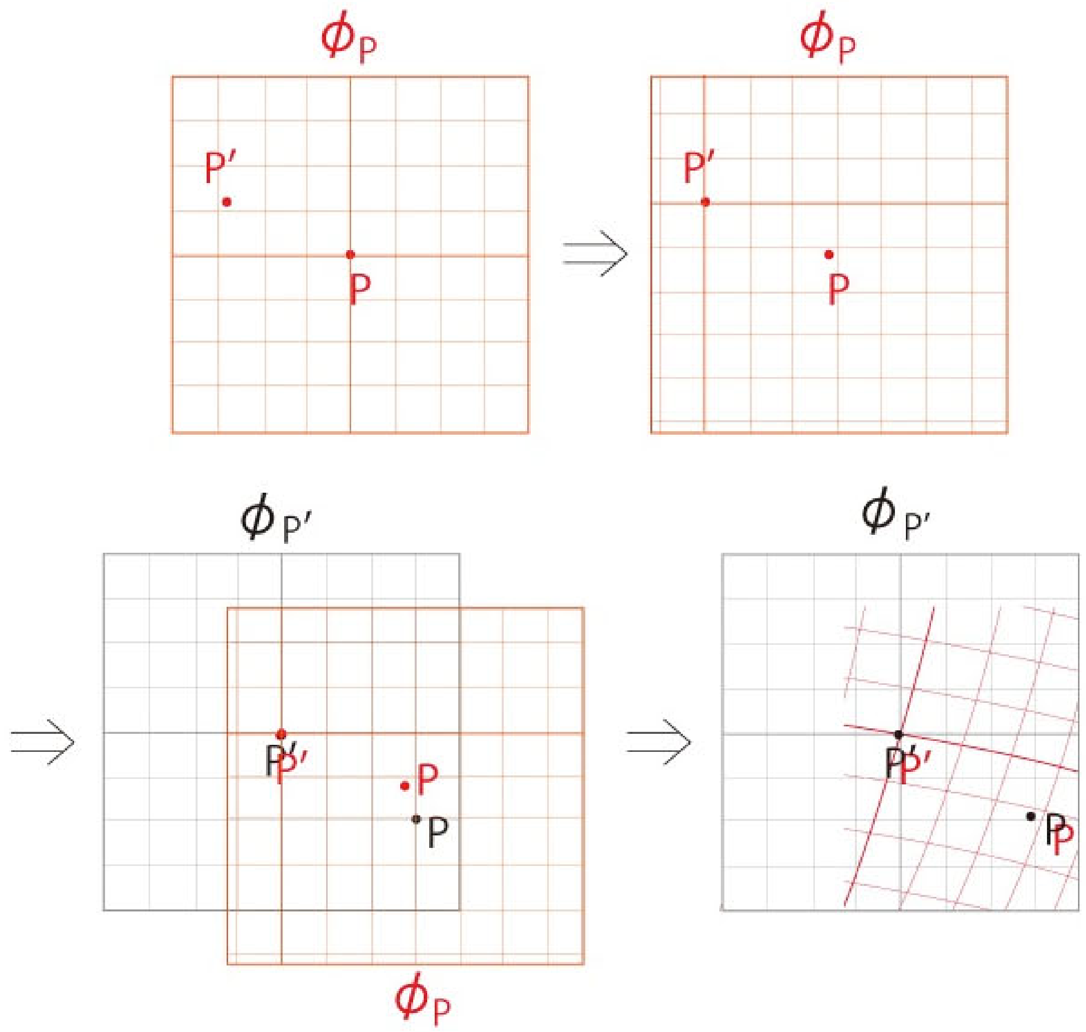
２点P, P' 間の距離──微小な距離──を測る。
これは，つぎのように考える：

地図 ϕ_P を地図 $\phi_{P'}$ に読み込む。
$\phi_{P'}$ に現れた P, P' 間の距離を，デカルト座標で読む。

$P,\ P'$ 間の距離は，なぜ ϕ_P ではなく $\phi_{P'}$ 上で読まれるのか。
物事の進行は，このようになるからである。
P' は P の後に続く存在であり，本来，P' が現れたところで $P,\ P'$ 間の距離の対象化となるわけである。

$P,\ P'$ 間の距離を求める。

ϕ_P を $\phi_{P'}$ に読み込む：



図は，デカルト座標 X^i と曲線座標 x^i のメッシュを描いているので，座標をそのまま読めそうに思わせてしまう。しかし実際は，座標のメッシュは計算して出てくるものである。そしてその計算は，いまから行おうとする計算と同じものである。

このときわかっているとするものは，$\phi_{P'}$ 上の P の x^i 座標

$$(a^1,\ \cdots,\ a^n)$$

である。

というのも，これは ϕ_P における P' の X^i 座標の符合を逆にしたものだからである。

これの X^i 座標

$$(A^1,\ \cdots,\ A^n)$$

は，座標変換の式に順い，つぎのようになる：

$$\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

そこで，$P,\ P'$ 間の距離 s は，

$$\begin{aligned} s^2 &= \sum_k (A^k)^2 \\ &= \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} a^i \right)^2 \\ &= \sum_k \left(\sum_{i,j} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} a^i a^j \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) a^i a^j \end{aligned}$$

ここで，

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial X^k}{\partial x^j}$$

とおいて，つぎの式を得る：

$$s^2 = \sum_{i,j} g_{ij} a^i a^j$$

はじめに述べたように，距離の計算は「微分」で考えることになる。
よって，最終的に提示する式は，つぎのものである：

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial X^k}{\partial x^j}$$

ここまで「距離を求める」と言ってきたが，いまよりは「計量」の言い
る。
——実際，「距離「も「計量」も，英語では同じ metric である。

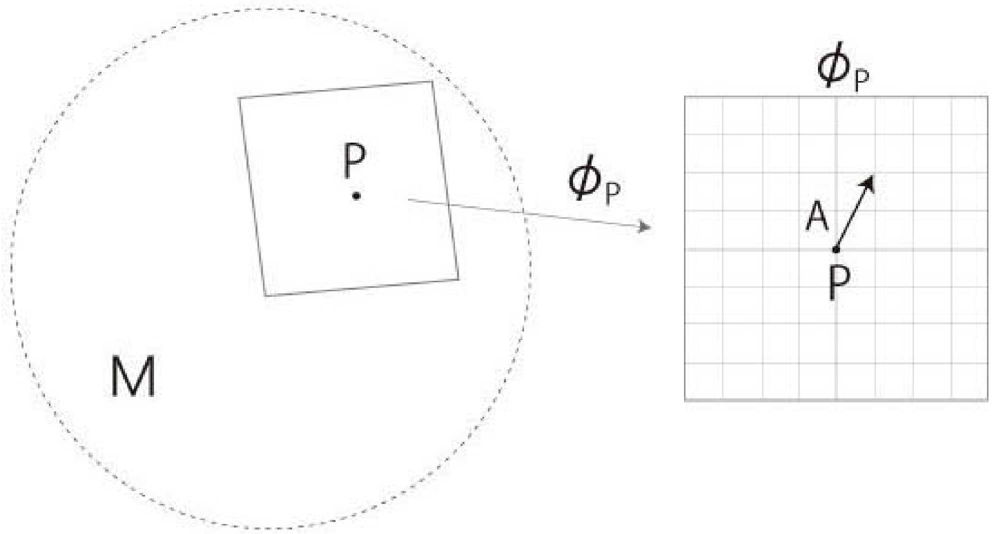
5.2　測地線

5.2.1「真っ直ぐ進む」

5.2.1「真っ直ぐ進む」

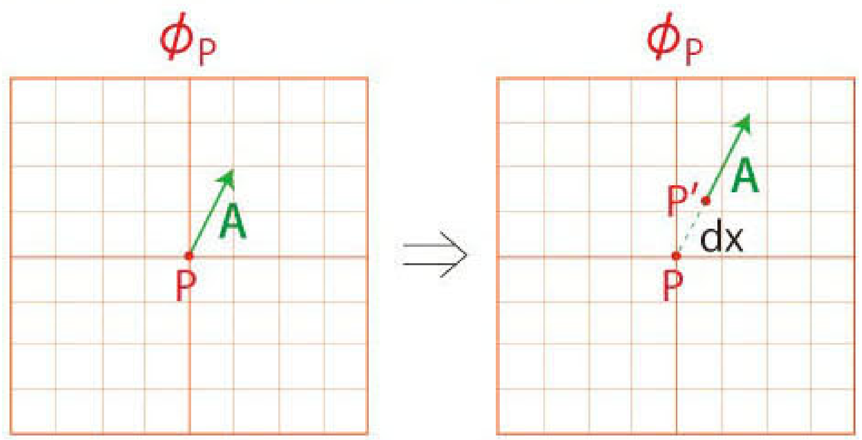
リーマン多様体 M の上を，点 P を出発点にして真っ直ぐ進むことを考える。

地図 ϕ_P を開き，この上にベクトル $\mathbf{A}$ を描く：

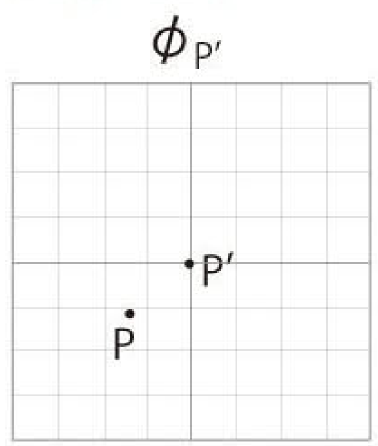


そして，

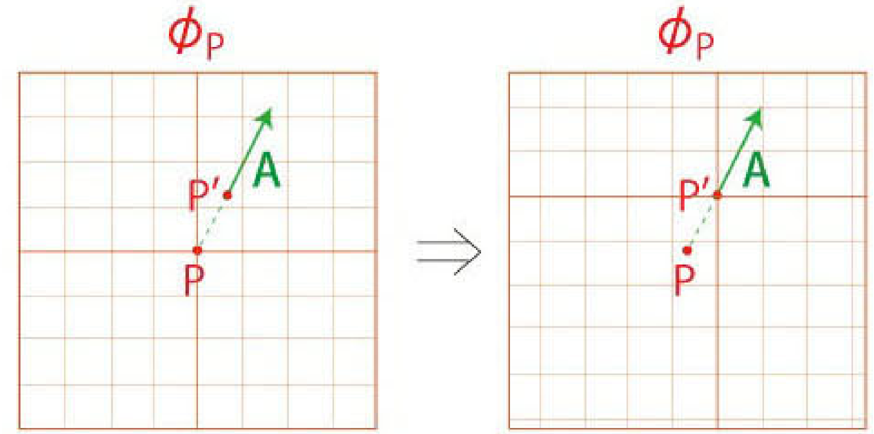
1. ϕ_P の上で，$\mathbf{A}$ をこれの方向に $d\mathbf{x}$ だけ進める。

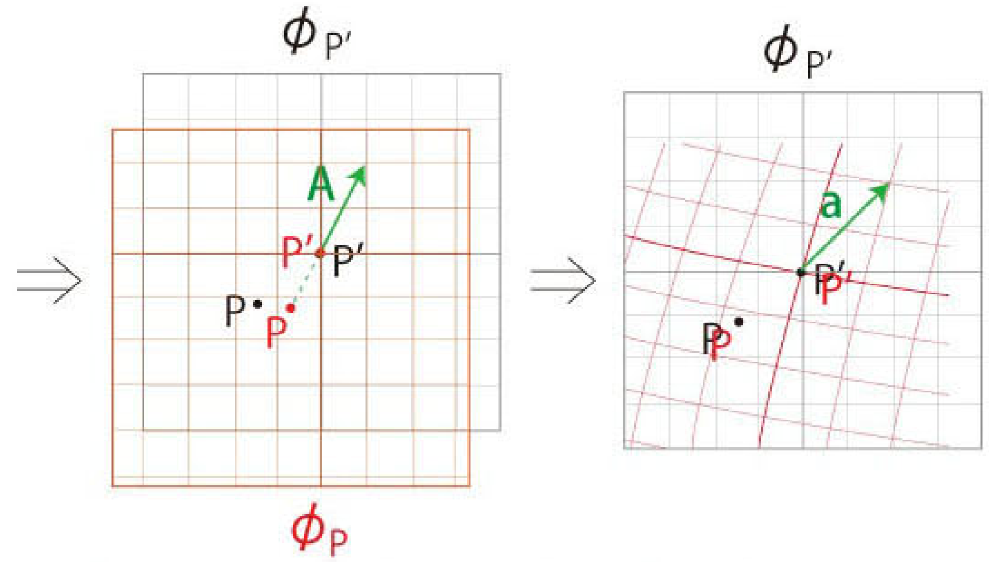


2. 進めた先の点 P' の地図 $\phi_{P'}$ を開き，



地図 ϕ_P を読み込む。





3. $\phi_{P'}$ の上で，$\mathbf{a}$ ($\mathbf{A}$ の像) をこれの方向に $d\mathbf{x}$ だけ進める。

4. この手順を繰り返す。

そうすると，開いた地図 ϕ_P 全体に対する P 全体は，「$d\mathbf{x} \to \mathbf{0}$」と合わせるとき，$M$ の上を真っ直ぐに進んだ軌跡になっているはずである。
――実際，「真っ直ぐ」は，これ以外の意味では考えられない。

この「真っ直ぐに進む」によってできる線を，「測地線」と呼ぶ。
上の場合は，ベクトル A から始めたので，「A に順う測地線」ということになる。

地図を接ぐこの手順は，「実行できる操作」である。
これは，「測地線」は存在定理を俟つまでもなく存在する，ということである。

6　場

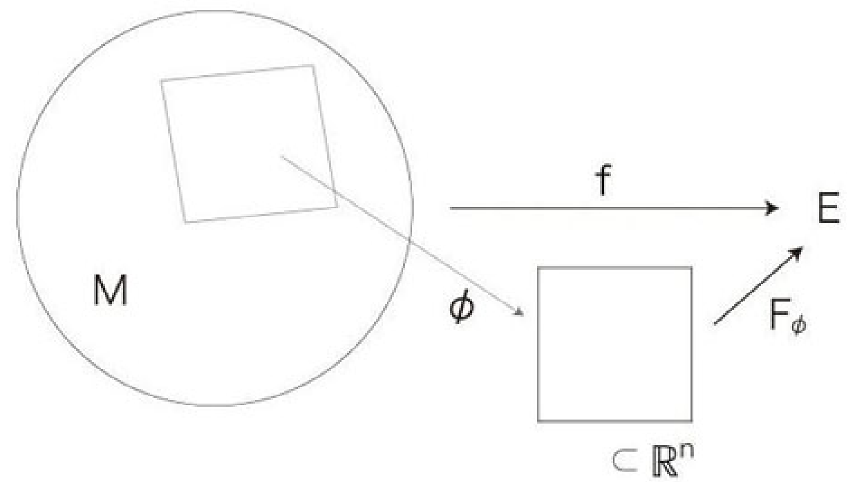
6.1「場」とは

6.1.1「場」の定義

地図には，地域情報が書かれている。
さて，この記述は，どんな構造になっているのか。

以下のように考える。

多様体 M に対し，集合 E と関数 $f : M \to E$ が立っている。
各地図 ϕ に対し，つぎの図式を可換にする関数 F_ϕ が存在する── 実際，$F_\phi = f \circ \phi^{-1}$ がこれである：



各 $\mathbf{p} \in \phi$ には，F_ϕ によって E の要素が対応している。
これは，$\mathbf{p}$ の「f 情報」ということになる。

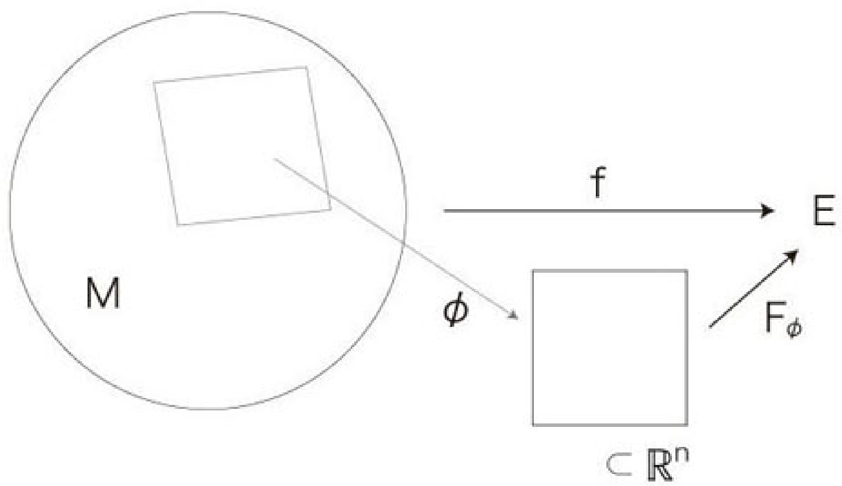
ここで，「場」のことばを，つぎのように導入する：

「M は f 場である」

多様体 M の地図帳は，M の解析のために導入されているものである。
M の解析は，M に関する情報の解析である。
そして「M に関する情報」を，ここで述べた構造のものとして考えようというわけである。

6.1.2 「等値線」(←「等高線」)

多様体 M の地図 ϕ には，地域情報が記述されている。
この「情報」を，つぎの構造による「f 情報」として捉える：

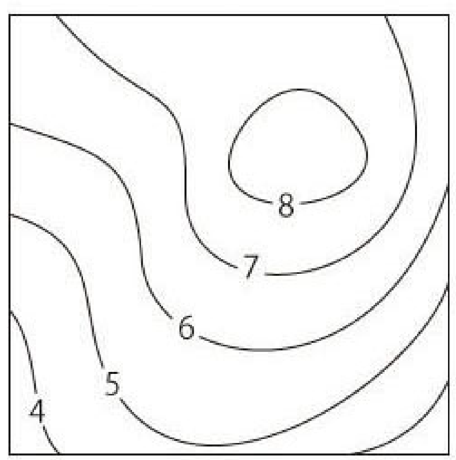


即ち，各 $\mathbf{p} \in \phi$ には F_ϕ によって E の要素が対応しているが，これを $\mathbf{p}$ の「f 情報」とするというわけである。

地図の特徴は，「等高線」である。
これは，「等値線」と捉えるものになる：

$e \in E$ に対し，集合 $F_\phi^{-1}(e)$ —— F_ϕ 値が e である E 上の点全体 ——を，「値 e の等値線」と呼ぶ。

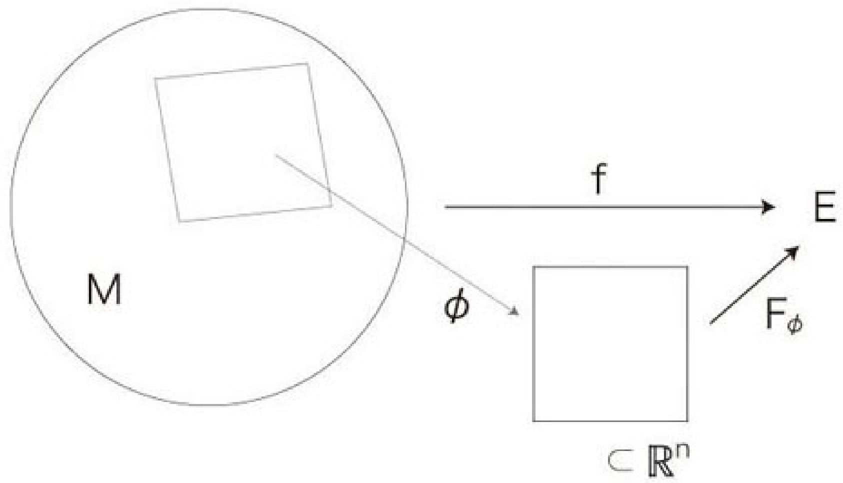
例えば，$E = \mathbb{R}$ のときの $F_\phi^{-1}(5)$ は，「値５の等値線」である。



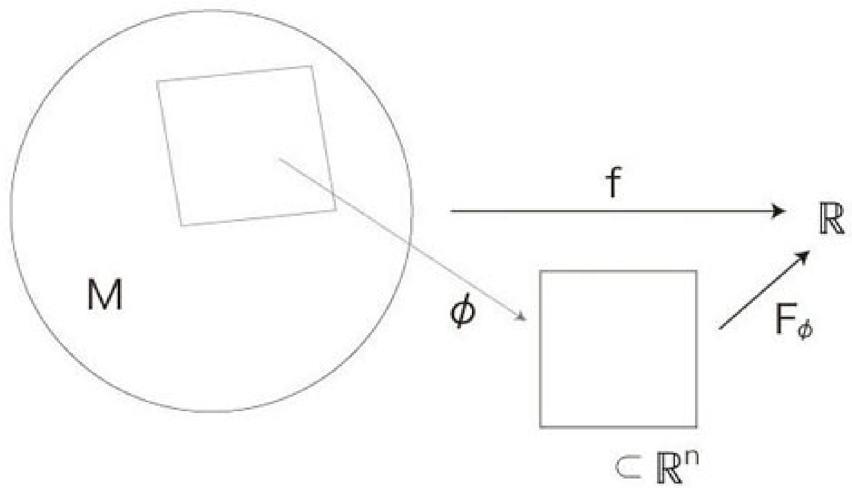
6.2　スカラー場 , ベクトル場 , テンソル場

6.2.1　スカラー場，ポテンシャル

「f 場」の定義図式

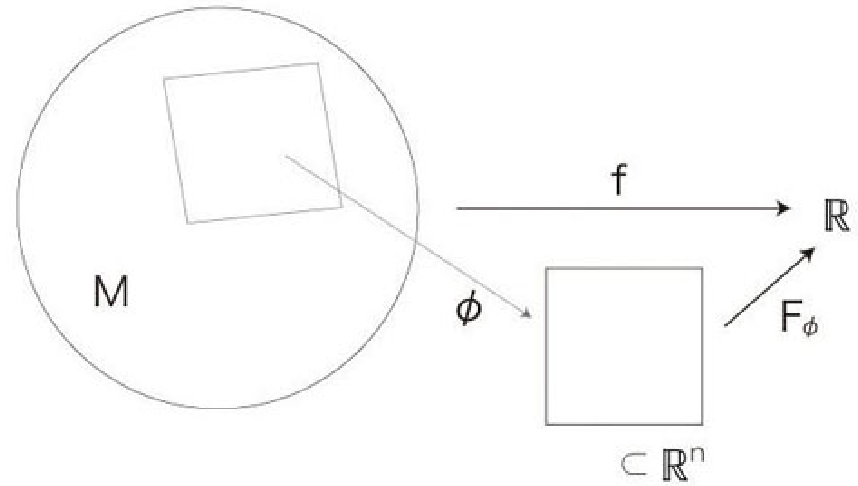


の「E」を，$\mathbb{R}$ に換える：



このときの「f 場」を，「スカラー場」と謂う。

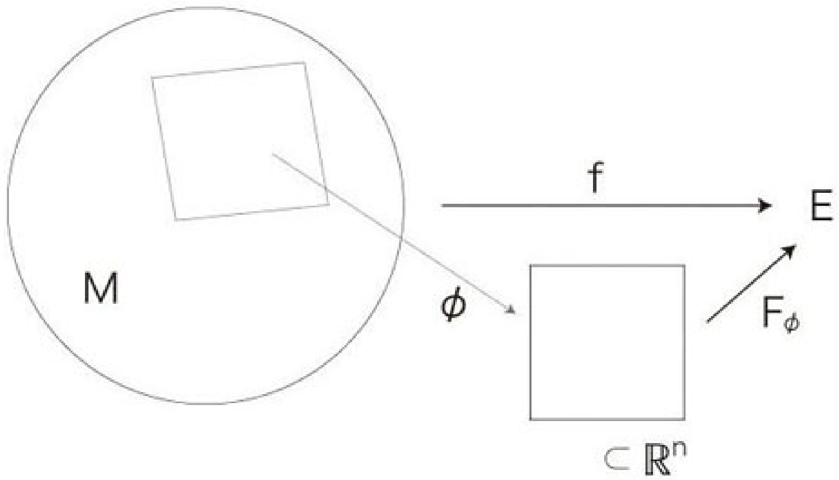
地図情報の一つに，「標高」がある。
標高を単位固定でスカラーで表すとき，これはスカラー値関数 f を下図式のように立てることであり，このとき「f 場」は「スカラー場」である：



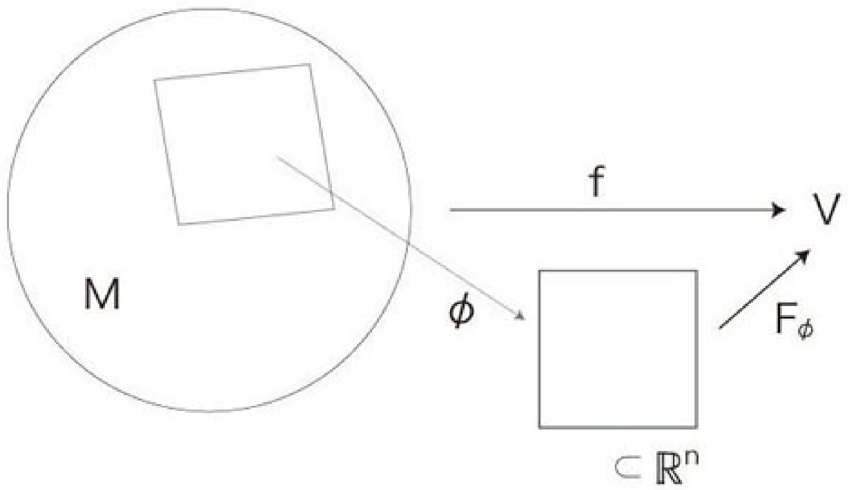
翻って，「標高」と「スカラー値関数」は，構造的に区別のつかないものになる。
そこで，「スカラー値関数」を「標高」と読むとしよう，となる。
しかし，「標高」だと，一般的表現の感じがしない。
こうして，「ポテンシャル」のことばとなる。

6.2.2　ベクトル場

「f 場」の定義図式



の「E」を，「ベクトル空間 V」に換える：



このときの「f 場」を，「ベクトル場」と謂う。

f のイメージとしては，例えば「ある時点における，各地点 x で風ベクトル (向き・大きさ)」。

ベクトル場の地図では，$\mathbf{v} \in V$ に対する $F_\phi^{-1}(\mathbf{v})$ は等値線にならない。
等値線は，ベクトルの成分ごとに描くものになる。

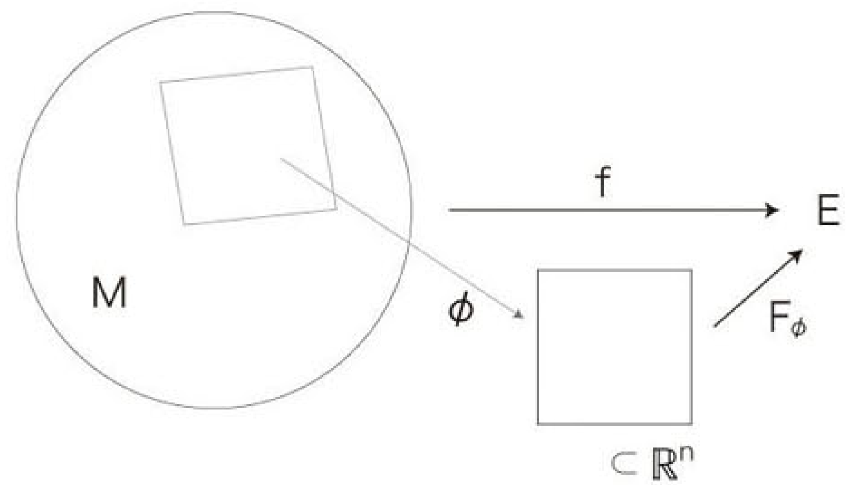
「風」の場合だと，
- 風の向きが等しい地点をつないだ等値線
- 風の強さが等しい地点をつないだ等値線

6.2.3　マトリクス場

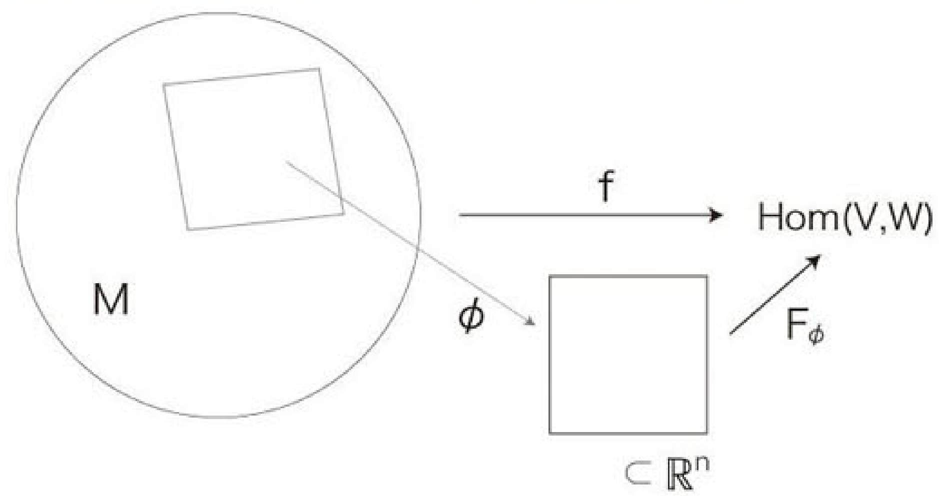
「ベクトル場」に続けて措定する場は，「テンソル場」である。
しかしここでは，「ベクトル場」と「テンソル場」の間に，「マトリクス場」をはさむことにする。

この構成は，教育的観点から行うものである。
「テンソル」の学習者は，「テンソル」とは何かをわからずに過ごす者である。
こうなるのは，「テンソル」の教授の仕方――それは「テンソル」を「マトリクス」と混同させるだけの教授の仕方――に原因がある。
実際，「マトリクス」を「テンソル」の意味にしているテクストもあるくらいである。
そこで，「テンソル」の前に「マトリクス」を取り上げることで，「*テンソルはマトリクスのことではないよ*」を示しておこうというのである。

マトリクス (行列) は，線型写像の表現行列のことである。
したがって，「f 場」の定義図式



の「E」に換わって措かれるものは，「$Hom(V, W)$」である：

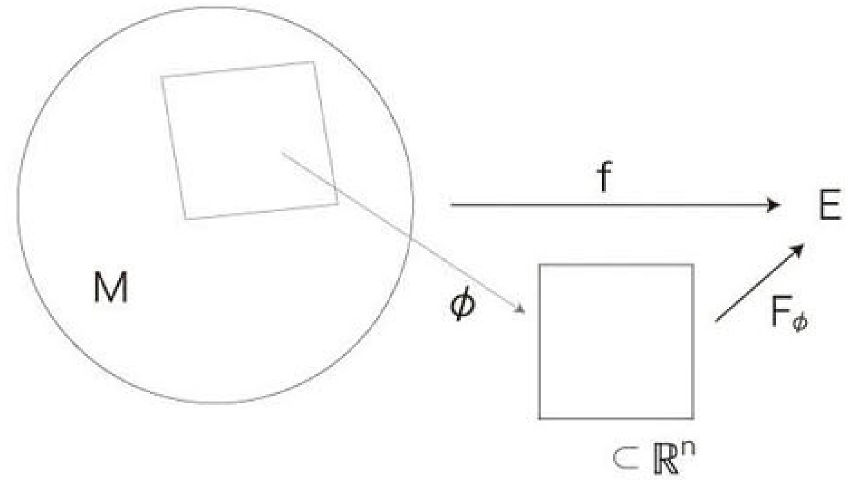


このときの「f 場」を，「マトリクス場」と謂う。

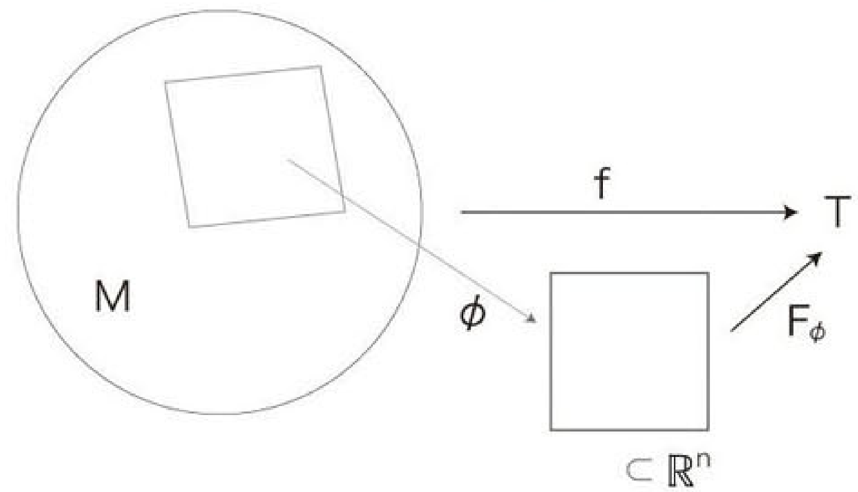
「マトリクス場」とは，どんなふうのものか。
例えば，ある時点での M の各点 x の気圧を記述することを考える。
気圧は，空気の単位体積あたり重さで表現できる

6.2.4　テンソル場

「f 場」の定義図式



の「E」を，「テンソル積 $T = V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$」に換える：



このときの「f 場」を，「テンソル場」と謂う。

「ベクトル場」と「テンソル場」の間に「マトリクス場」をはさんだ。
そしてその理由を，「*テンソルはマトリクスのことではないよ*」を示しておくため，と述べた。

テンソルは，マトリクスの概念の拡張ではない。
マトリクスとは，線型写像の表現行列のことであった。
そして $Hom(V, W)$ は，テンソル積 $V^* \otimes W$ と同じことになる。
マトリクスに対応するテンソル積が $V^* \otimes W$ だということは，テンソルがマトリクスの概念の拡張というものではないことを示す。

ただし，物理学・工学で「テンソル」と呼ばれているもののうちには，「テンソル積」とはならないものがある。

この場合，「加減乗除計算のワンパッケージ──計算公式」が「テンソル」と呼ばれていることになる。
そしてこのときは，一つの計算式 t に対し，座標変換で t になる計算式全体の集合が，上の図式の中の「T に該当する。

おわりに

『「リーマン多様体」とは何か』と題した本テクストは，専ら「地図帳 atlas」の話である。
なぜか。
リーマン多様体の地図帳が，「リーマン多様体」の意味だからである。

この内容は，「リーマン多様体」の一般のテクストには無い内容である。
実際，本テクストをつくらねばならなかったのは，「リーマン多様体」の意味が書かれているテクストが存在しないためである。

逆に，「リーマン多様体」の一般のテクストが内容にしているものが，本テクストには無い。
それらは，個人の興味・関心に応じて入って行けばよい内容だからである。
これに対し「意味」は，個人の興味・関心に応じて入って行けばよい内容というふうにはならない。

では，なぜ『「リーマン多様体」とは何か』なのか。
このテクストは，「相対性理論」へつなげていくためのものである。

「リーマン多様体」と「相対性理論」は，つぎの関係にある：

a. 「相対性理論」は，「リーマン多様体」が現空間の数学モデルになっている。
b. 「リーマン多様体」の応用は，「相対性理論」が唯一のものである。

こうして，「リーマン多様体」とは何かをわかっていることが，「相対性理論」を読む上で必要になる。
翻って，「相対性理論」が読めるとき，「リーマン多様体」もわかっていることになる。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/me/subjects/space/riemann_manifold/

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て北海道教育大学教育学部教授 (数学教育専門)，2015 年退職。

「リーマン多様体」とは何か

2018-03-12　アップロード (サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp