「テンソル」とは何か

宮下英明 著

Ver. 2018-04-25

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「テンソル」とは何か

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『「テンソル」とは何か』を PDF 文書の形に改めたものです。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

「テンソル」とは何か

はじめに

何かを行うに対し，その何かを行うとはどういうことかを考える。
これを，何かを行うのメタ論と謂う。
物理法則をつくる営みに対し，「物理法則をつくる」とはどういうことかと考える。
これは，物理法則のメタ論である。

「テンソル」は，物理法則のメタ論をやるときに出てくる概念である。
実際，「*物理法則の構造は，テンソルだ*」というふうに出てくる。
よってその概念は，物理法則のメタ論そのものである。

こうして，物理に携わる者・物理を探求したいと思う者にとって，「テンソル」は必修科目になる。

「テンソル」を学習しようとする者は，学習テクストを求める。
学習テクストは，書籍およびオンラインテクストである。
しかし，テクストは，彼らをリードするものではなく，ミスリードするものである。
こうして彼らは，「*テンソルって何だ？*」の問いを，きまって発する者になる。

「*テンソルって何だ？*」の問いに対しては，これに答えようとするテクストが現れる。
しかし事情は，学習テクストと同じになる。
思いつきを書き散らすというものであって，ミスリーディングの状況をいっそう悪くする。

思いつきを書き散らす体(てい)になるのは，「<何>に対する答の形式」の考えを持たないからである。

「*テンソルって何だ？*」の問いは，what, why, how をすべて含んだ問いである。
学習者は，「*なにがなんだかだっぱりわからない*」になっている者であり，「*テンソルって何だ？*」は「*なにがなんだかだっぱりわからない*」の訴えである。
この問いに対する答えの核は，what である。
実際，why は what に対する why であり，how は what に対する how である。

what を述べる形式は何か。
数学がこの形式を開発した。
それは，「構造」である。

「構造」は，現象に対し本質を区別する概念である。
本質を「構造」とし，現象を「表現」とする。
こうして，構造論と表現論が分けられることになる。
これは，本質論と現象論をごっちゃにさせないという意味をもつ。

こうして，「*テンソルって何だ？*」に対する答の形は，what の答えが核心であり，そしてそれは「*テンソルとはこういう構造のことを謂う*」である。

「構造」のことばによる「テンソル」の定立は，どこにあるか。
数学の「テンソル積」が，これである。
実際，この他には無い。
そこで，「*テンソルって何だ？*」に対する what の答えは，数学の「テンソル積」である。
「テンソル」の学習テクストは学習者をミスリードするばかりだが，これはもっともなことで，数学の「テンソル積」の考えが無いのである。

ただし，数学の「テンソル積」は，「テンソル」と呼ばれてきたものすべてを収容する概念ではない。
ここが注意すべき点である。

「テンソル」は，数学がこれを定式化するより前にあったものである。
数学の定式化は，慣習 (プラグマティクス) の定式化である。
慣習 (プラグマティクス) の定式化では，これから漏れるものが出てくる。
テンソルの代表のように受け取ってしまいそうな「計量テンソル」が，まさにこれである。
よって，定式化から漏れるものは，無視してよいものではない。

そこで，「*テンソルって何だ？*」に対する what の答えでは，「*テンソルと呼ばれてきたもののうちには，非テンソルがある*」を言わねばならない。
ここで留意すべきは，「テンソル積」を土台に据えることである。
「テンソル積」から漏れる「テンソル」があるということは，「テンソル」論はあれやこれや論になるということではない。
──尤も，「テンソル」の学習テクストの混迷は，土台に据えるべき「テンソル積」を端(はな)から持っていないということに因るのであるが。

こういうわけで，「テンソル」の what 論をここに提供する。

構成を見てのとおり，小学数学に出てくる量の公式をテンソル積として解説することが，このテクストの中心になっている。
読者にとって何を論じているかがよくわかるだろうし，実際「テンソル」のネタはこれですべて揃うからである。

もっとも，数学の「準同型・同型」「同値類」の概念に疎遠な読者の場合は，難しいと感じるところはあるだろう。

本テクストは，「テンソルの基底・座標」の章で終わる。
これは，「量の公式を適用する数値計算は，単位依存」の一般論として措くものである。
これは，「テンソル」の学習テクストの主要部分になるところの「座標変換」ではない。

「テンソル」の学習テクストの「座標変換」は，「可微分多様体」「テンソル場」を文脈とする「座標変換」である。
これを扱うには，「可微分多様体」の枠組のもとで，仕切り直しをしなければならない。
この仕切り直しは，《テンソル」の意味を理解していることが，この内容に進む要件になる》というものである。
よって，「*前もって「テンソル」の理解を確かなものにしておけ*」となるわけである。

こういうわけで，本テクストは，「テンソルの基底・座標」を終章として終える。
実際，ここまででも，十分な嵩になっている。
「可微分多様体」の枠組のもとの仕切り直しは，別テクストを以てする。
（予定：『「リーマン多様体」とは何か』）

「テンソル」の学習テクストは，「テンソルの基礎」から「座標変換/可微分多様体」へ切り替える構成も，まるでなっていない。
「すべてにおいて中途半端」という体である。

本テクストは，学習テクスト批判を併せて行う。
学習テクスト批判は，本論の中でも折に触れて繰り返される。
なぜか？
学習者を，学習テクストのミスリーディングから救おうとするためである。

学習者は，学習の躓きを自分のせいにする者である。
初心者であるとは，権威主義者だということである。
彼らは，学習の躓きを授業者や学習テクストのせいにすることを知らない。
そこで，彼らには「*問題は，授業者や学習テクストの方にある*」を改めて言ってやらねばならない。

よくよく知るべし。
学習テクストをつくる者は，＜わかっているからつくる＞者ではない。
彼らは，＜つくる立場にあるのでつくる＞者である。
「専門」とは立場のことである。

1　「テンソル」とは何か

1.1 「テンソルとは何か」の学習テクストが無い

1.2 「テンソル」の思想——理論物理の存在論

1.3 「テンソルとは何か」への答え：「量の公式」

1.4 「テンソル」の数学：「テンソル積」

1.5 「テンソルは量の公式」とは

1.6　本テクストの構成

1.1 「テンソルとは何か」の学習テクストが無い

テンソルをわかろうとするのは，難儀である。
そもそも学習テクストがない。

きちんと書いているのは数学のテクストだが，これは形式としての「テンソル」の論で終始する。この形式の意味──「これは何のためか」──が書かれていない。
（ちなみに，数学の「テンソル」は，ブルバキの『代数学』にこれの最も整った定式化を見ることができる。）

テンソルは，使い道があるから概念になっている。
使い道がわかることが，意味がわかることである。
テンソルを使っているのは，物理学や工学である。
では，物理学や工学のテクストに「テンソル」の学習テクストがあるかというと，これが無いのである。
物理学や工学では，「テンソルがわかる」は「慣れて使えるようになる」といったふうである。

この体(てい)は，別に不思議なことではない。
ひとは生活の中で数の計算をふつうにやっているが，「数と何か」「計算とは何か」と問われると答えることができない。
「テンソル」事情は，このようなものである。

とはいえ，学習テクストは，形式に程よく厳密でないと用を足さない。
形式は，実用の学習にとってどうでもよいものではない。
ひとは，理屈がわからなくなると，そこで頓挫する。
理屈がわかるとは，形式がわかるということである。
翻って，学習のこの機微のわからない者には，学習テクストはつくれない。

なぜ本テクストをこのような話から始めるのか。
それは，学生とは，わからないとそれを自分のせい（「*自分はアタマが悪い*」）にするものだからである。
「*教授がなっていない*」という思いを持てなくて，自分で勝手にドロップアウトしてしまう。
そこで彼ら──本テクストの読者──のために，最初に，

　　「テンソルをわかろうとするのは，難儀である
　　　──そもそも学習テクストがない」

をはっきりさせておこう，というわけである。

1.2 「テンソル」の思想──理論物理の存在論

物理学の中で「物理的存在」を措定しようとする。
さて，どうしたらよいか。
これは，改めて考えてみると，悩ましい問題である。

物理学は科学であるから，哲学の存在論のようなことはしない。
物理学は，操作的にこの問題を処す。

地域Aのことばａと地域Ｂのことばｂが，どうも同じ物事を指しているように思えるとする。
このとき，「*どうしてそう思えたのか？*」と考えてみる。
答えは，「*ａ，ｂの用法が同じ（同型）だ！*」である。

ここで，ことばの使われ方の同型が見えるために，必要なことがある。
地域Ａの生活の流儀と地域Ｂの生活の流儀を，一方から他方へ翻訳できることである。

物理学が存在問題を操作的に処す方法は，これである。

即ち，つぎのように置き換える：

　　「地域A，B」→「座標系A，B」
　　「ことばａ，ｂ」→「代数式ａ，ｂ」
　　「ａ，ｂの用法が同じ」→「ａ，ｂは座標系A，Bの変換の上で対応」

そして，「ａ，ｂは座標系A，Bの変換の上で対応」を「ａとｂは同じ物事を指している」にする。
さらに座標系Bを任意にして，「ａが指している物事」を＜存在＞として立てる。

「テンソル」は，この方法によって理論物理における存在表象にされるものである。

　註：この存在論は，構図において，「イデア論」である。

1.3 「テンソルとは何か」への答え：「量の公式」

「テンソル」は，それとは知らずに，身近にしてきているものである。
小学生がやっている「タテ×ヨコ」や「距離÷時間」は，テンソルである。
実際，量の公式を立てれば，それはテンソルになっている。
また物理法則として出てきた公式は，そのままではテンソルではなくとも，テンソルの形に還元できるものである。

テンソルを身近にしてきたことは，テンソルを勉強してきたことではない。
テンソルを勉強するとは，テンソルを自覚的に対象としてもち，これの意味・理由の理解と用法の修得に取り組む，ということである。
これは，専門の領分になる。
自然数は小学１年からやっているが，自然数論だと専門数学の領分になるのと同じである。

テンソルを勉強することになった者は，「テンソルとは何か？」の問いをもつ。
学習テクストには，テンソルとは何かが書いていないからである。

この問いは，定義の類を示すことは答えにならない。
なぜなら，この問いの「何か？」は，「なぜこの定義なのか？」「なぜこの構成なのか？」を含んだ大きな「何か？」なのである。
要するに，学習者は，どんな世界が自分に示されてきたのか，さっぱりわからないのである。

彼らに対するいちばんよい答えの形は，「‥‥がわかる・できるために勉強するもの」である。
そして「テンソル」の場合は，「公式がなんたるかをわかるために勉強するもの」である。
実際，公式がなんたるかをわかるためにために必要となるのが，「テンソル」の概念である。

「公式」とは何か。

「公式」は，文字で記述される。
なぜか？
「公式」は，＜普遍＞の表現として立てるものである。
＜普遍＞のかたちは＜形式＞——状況依存の＜内容＞に対する＜形式＞——である。
その＜形式＞は，文字で記述することになる。

状況依存となるのは，計測者である。
ここで「計測者」は，それが存在する空間の位置・位相の特殊性と，測度の任意性

を意味する。
「公式」として立てようとするのは，普遍的な式である。
普遍的であるとは，＜形式＞において計測者に依存しないということである。

計測者が立てる式には，変数 variable と定数 constant がある。
定数には，具体的な値が入る。
「公式」では，その定数が文字になる。
「公式」の文字はすべて変数 variable であるが，この変数は二つのカテゴリーに分かれる。
一つは定数的変数であり，計測者にとって定数 (＝具体値) になるものである。
そしてもう一つは変数的変数であり，計測者にとって変数になるものである。

「計測者に依らない」「形式として普遍」は，何を以てこうであるとするか。
即ち，「計測者に依らない」「形式として普遍」の規準 criteria は何か。
規準は，「座標変換に対する可換性」である。

即ち，計測者のいる空間の特殊性，計測者の測度の任意性を，「座標の特殊性」ということに一般化する。
こうして一人の計測者は一つの座標系のことになる。
この座標系群のなかの座標系一つ一つについて，座標変換を試す。
そしてそのそれぞれで「公式」にしようとする形式が保たれていれば，「公式が成った」とする。

この内容を，理論にする。
こうして出来上がってくるのが，「テンソル」の理論である。
「テンソル」とは，端的に，「式」である。

「テンソルとは何か」の問いに対して答えることになるのは，このような要約である。

1.4「テンソル」の数学：「テンソル積」

「テンソル」は，数学から出て来たのではない。
計算形式のあるものが「テンソル」と呼ばれてきたという経緯が，先ずある。
数学は，「テンソル」を数学的に定式化して，「テンソル」の数学をつくる。

この定式化は，「テンソル」と呼ばれてきたもの全体を収納するものとはなっていない。即ち，「テンソル」と呼ばれてきたものには，この定式化からはじかれるものがある。
例えば，「テンソル」といえば必ず主題になる「計量テンソル」は，この定式化から外れる。

数学の「テンソル」は，簡単にいうと，記号「$\otimes$」の文法──「テンソル積」──である。
その数学がどんなものかを，はじめに見ておく。

つぎのように措く：

U, V, W : 体 K 上のベクトル空間
ϕ : $U \times V$ から W への双線型写像

> 「長方形の面積」が最も卑近な例になるので，これをイメージにもつとよい：
>
> U : タテ(長さ) 全体
> V : ヨコ(長さ) 全体
> W : 面積全体
> ϕ : (タテ $\mathbf{x}$, ヨコ $\mathbf{y}$) $\longmapsto$ タテ $\mathbf{x}$, ヨコ $\mathbf{y}$ の長方形の面積
>
> ϕ は，タテ，ヨコの一方を固定したとき線型写像である：
>
> タテの長さが2倍，3倍，‥‥ になれば，長方形の面積も2倍，3倍，‥‥ になる。
> ヨコについても同じ。
>
> この「一方を固定したとき線型」を，「双線型」というのである。

つぎは，集合 $U \times V$ 上の同値関係になる：

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \ : \ \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$$

この同値関係による $U \times V$ の商集合を「$U \otimes V$」で表す。
また，$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が代表元になる同値類を，「$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$」で表す。

> 「長方形の面積」の場合，「$U \otimes V$」は「タテ$\otimes$ヨコ」である。
> これは，長方形の面積が同じになる (タテ, ヨコ) の類別である。
> そして，例えば「タテ3cm，ヨコ4cm」と「タテ2cm，ヨコ6cm」は，長方形の面積が同じになるから，「3cm $\otimes$ 4cm ＝ 2cm $\otimes$ 6cm」となる。

$U \otimes V$ は，体 K 上の線型空間になる。
そして，最後の仕上げが，つぎの図式を可換にする線型写像 $\bar{\phi}$ である：

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & W \\ U \otimes V \arrow[ur, dashed, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

要素の対応で書くと：

$$\begin{tikzcd} (x, y) \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{can.}"'] & \phi(x, y) \\ x \otimes y \arrow[ur, dashed, mapsto, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで「can.」は，「標準写像 canonical map」の意味。

$\bar{\phi}$ は，「長方形の面積」の例だと，「公式：タテ × ヨコ ＝ 面積」と解釈されるものになる。
実際，「$\bar{\phi}$：タテ$\otimes$ヨコ $\longrightarrow$ 面積」に対しては，このように読むのみである。

ここに，「計算公式」を身分とする数学的対象が得られたことになる。
そして「テンソル」がこのときの手法がであったことから，「計算公式」は「テンソル」と関係していることが予想される。
実際，「*計算公式とはテンソルのことだ*」が，結論として用意されているものである。

計算公式が「計算公式」である所以は，量計算式の場合だと「単位を変えても形式が保たれる」である。
そこで，一般に計算公式が「計算公式」である所以は，「座標を変えても形式が保たれる」である。

「座標を変えても形式が保たれる」がどうして要点になるのか？
それは，「*存在は表現に先立つ*」の存在論に立つからである。
「公式」には，「存在」を直接指すものとして，表現に依らないことが求められる。
そして，「表現に依らない」の存在様式は，「形式」である。

1.5「テンソルは量の公式」とは

ここまで，中身を説明せずに，「テンソルは量の公式」と言ってきた。
この意味を，簡単に述べておく。

長方形の面積の公式「タテ×ヨコ」を考えてみる。
これは量の公式であり，タテ，ヨコは量である。
量は，線型空間になる——そして量だと，１次元線型空間。

この「量×量」の「タテ×ヨコ」を数学化すると，テンソル積「タテ⊗ ヨコ」になる。
これが，「テンソルは量の公式」という意味である。

しかしこれでほんとうに，「テンソルは量の公式」ということになっているのか？
確認する。

タテ２cm，ヨコ３cm の長方形の面積を求める。
このとき「タテ×ヨコ」を適用するわけである。
「２cm×３cm」は，タテ⊗ ヨコ の要素 $\mathbf{2cm} \otimes \mathbf{3cm}$ として，$\otimes$ の文法に順う：

$$\mathbf{2cm} \otimes \mathbf{3cm} = (2 \times 3)\,(\mathbf{cm} \otimes \mathbf{cm})$$

$\mathbf{cm} \otimes \mathbf{cm}$ には「cm^2」が対応しており，「(２ × ３) cm^2」を得る。
$\otimes$ の文法に順うことが「公式」の適用になっているわけである。

つぎに，速さの公式「距離÷時間」を考えてみる。
「タテ×ヨコ」と違って，「量÷量」の式になっている。
しかし，数の割り算が除数を逆数に替えて掛け算になるように，「距離÷時間」は，時間の双対「時間*」というものをとることで，「時間*⊗距離」になる。

２秒で６ｍ の速さを求める。
このとき「距離÷時間」を適用するわけであるが，この適用は，時間*⊗距離 の要素 $(2秒)^* \otimes \mathbf{6m}$ を $\otimes$ の文法に順わせることである：

$$(2秒)^* \otimes \mathbf{6m} = 2^{-1}秒^* \otimes \mathbf{6m} = (2^{-1} \times 6)\,(秒^* \otimes \mathbf{m})$$

$秒^* \otimes \mathbf{m}$ には「m/秒」が対応しており，「(６÷２) m/秒」を得る。

「タテ×ヨコ」「距離÷時間」は，二量が構成する公式である。
では，３つ以上の量で構成される公式は，どう考えることで「テンソル」になるか。

テンソル積 $U \otimes V$ は，それ自体一個の線型空間である。
よって，テンソル積はつぎのようにいくらでもつなげることができる：

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \cdots \otimes V_n$$

そして，３つ以上の量で構成される公式は，このようにつないだテンソル積に写すことができる。

かくして，「*テンソルは量の公式*」となるわけである。

1.6 本テクストの構成

テンソルの学習者が難儀するのは，テンソルの意味がわからないことである。
不思議なことだが，巷のテンソル学習は，テンソルの意味がわからず進行しているのである。

もっとも，これは数学の学習一般に言えることである。
数をずっと勉強させられ，そして実際に使ってきていながら，「数って何だ」と問われると，答えられない。
高校で微積分を学習した者に「微積分って何だ」と問うと，答えられない。
意味を不問にする学習に，馴らされているわけである。

本テクストは，学習者の発する「テンソルとは何か？」の問いに答えることに特化する。
学習者がどんなことに躓いており，どんなふうに五里霧中にあるかを考えて，内容を構成する。

これは，内容が入門的ということではない。

実際，教育というものは，＜やさしい内容＞から＜難しい内容＞へ進むのではない。
＜やさしく述べる＞から＜省力的に述べる＞へと進むのである。
内容は最初から最後まで同じであり，＜やさしく述べる＞から＜省力的に述べる＞へスパイラルに上昇するということである。
要は，＜繰り返し＞である。

2　モヤモヤのもとを最初にやっつけておく

2.1「ベクトル・行列の拡張」？

2.1.1　カテゴリー・ミステイク

「テンソル」の学習者は，「テンソルとベクトルの違い」「テンソルと行列の違い」みたいなレベルで躓いている者たちである。
その躓きは，たいていトンチンカンな形で躓いている。

「水」と「海」を直接比較するナンセンスを，カテゴリー・ミステイクという。
「テンソル」を「ベクトル」や「行列」と比べるのは，カテゴリー・ミステイクである。

巷の「テンソル」のテクストには，テンソルをベクトルの概念の拡張だと述べるものがある。
学習者は，そうなんだと思って「拡張」の意味を求める。
そして，苦し紛れの合理化をする。
そして，混迷を一層悪化させる。

「テンソル」のテクストは，こんなミスリーディングに満ちている。
ミスリーディングされない方法の第一は，ミスリーディングというものがあるのを知ることである。
これは，学習の要諦である。

ということで，「テンソル」のカテゴリーの起点を，説くとする。

2.1.2　Hom と ⊗

速さは，時間と距離の対で表現する。
例えば，(2秒，3 cm)。
これらの対を，「同じ速さを表す」を同値関係にして，類別する。
同値類の集合 (商集合) は，「Hom(時間, 距離)」と表されるところの線型空間 (ベクトル空間) になる。

長方形の面積を，タテの長さとヨコの長さの対で表現する。
例えば，(2 cm，3 cm)。
これらの対を，「同じ長方形の面積を表す」を同値関係にして，類別する。
同値類の集合 (商集合) は，「タテ⊗ヨコ」と表されるところの線型空間 (ベクトル空間) になる。

この２つの一般形式は，どうなっているか。
起点は，同じ体 K 上の２つの線型空間 $U,\ V$ である。
これの積集合 $U \times V$ に，つぎの二タイプの同値関係を考える：

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \sim (\xi\,\mathbf{u},\ \xi\,\mathbf{v}) \quad (\xi \in K)$$
$$(\xi\,\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \sim (\mathbf{u},\ \xi\,\mathbf{v}) \quad (\xi \in K)$$

前者による商集合は，K 上の線型空間 $Hom(U,\ V)$ になる。
後者による商集合は，K 上の線型空間 $U \otimes V$ になる。

$U \otimes V$ は，テンソル積と呼ばれる。
数学の「テンソル」は，「テンソル積」である。

「テンソル」をカテゴリー的に位置づけるような物言いをするとき，その起点は，
$Hom(U,\ V)$ と $U \otimes V$ を同列に措くことである。
$Hom(U,\ V)$ に対し「ベクトル・行列の拡張」を言うことがナンセンスであれば，
$U \otimes V$ に対し「ベクトル・行列の拡張」を言うことはナンセンスなのである。
そして，$Hom(U,\ V)$ に対し「ベクトル・行列の拡張」を言うことは，ナンセンスである。

数の割り算は，除数を逆数に替えて，掛け算になる。
$U \otimes V$ が「$U \times V$」であるのに対し，$Hom(U,\ V)$ は「$V \div U$」である。
U の「逆数」── U の双対 U^* ──を用いて，$Hom(U,\ V)$ は $U^* \otimes V$，すなわち「$U^* \times V$」になる。
（☞「距離÷時間＝速さ」）

こういうわけで，同値関係の微妙な違いで二つに分かれた Hom と ⊗ は，結局 ⊗ に一元化されることになる。
「量の公式の理論はテンソルの理論になる」というとき，「 ⊗ の片割れであった Hom は考えなくてよいのか」の心配になるわけであるが，この心配は無用となる。
──晴れて，「量の公式の理論はテンソルの理論」となるのである。

2.1.3　ベクトルの「行列」とテンソルの「行列」の比較

学習者が悩む「テンソルと行列の違い」は，正しくはつぎの主題である：

「ベクトルの行列とテンソルの行列の比較」

先ず，「行列」は，「行列計算」を文脈にするものである。
「行列」の格好をしていても，計算しないものは「行列」ではない。

行配列・列配列は，１行行列・１列行列として計算にのせるとき，「行列」である。

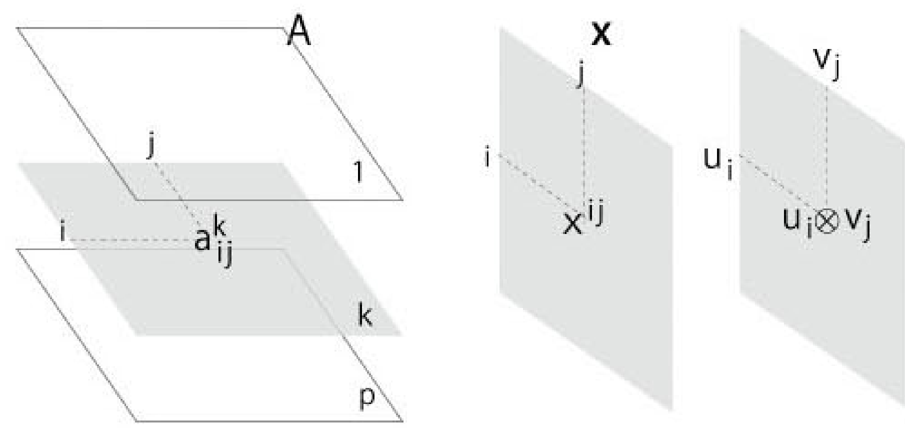
「行列」は，平方構造である。
平方構造に対しては，立方構造を考えることができる。
立方構造は，これを「３次元」構造ととらえることで，任意次元に拡張できる――図には描けないが。
「行列」をこのように次元拡張したものを，「超行列」と呼んでおく。

以上の留保のもとに，ベクトルの「行列」は，つぎのものである：

1. 線型空間 V の基底を構成するベクトルを，配列したもの：
$$(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$$
2. 基底 $(\mathbf{e}_i)$ に対するベクトル $\mathbf{x} \in V$ の座標を，配列したもの:
$$(x^1, \cdots, x^n)$$
3. ２つの線型空間 U, V それぞれの基底を固定したときの，線型写像 $f : U \to V$ の表現行列：
$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ & \cdots & \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$$
4. 線型空間 V の基底変換行列
5. 基底変換行列に対する「座標変換行列」の読み換え

そして，テンソルの「行列」は，つぎのものである：

0. テンソル積 $V_1 \otimes \cdots, \otimes V_n$ の各 V_i に伴う「行列」（上述の「行列」）
1. $V_1 \otimes \cdots, \otimes V_n$ の基底 $(\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_n)$ を配列したもの (超行列)
2. この基底に対する $\mathbf{x} \in V_1 \otimes \cdots, \otimes V_n$ の座標を配列したもの (超行列)
3. ２つのテンソル積それぞれの基底を固定したときの，両テンソル積間の線型写像の表現超行列
4. テンソル積の基底変換超行列
5. 基底変換超行列に対する「座標変換超行列」の読み換え



2.2　なぜテンソルか

2.2.1　量の公式 : 単位に依存しない

量の公式は，単位に依存しないことを要件とする。
なぜなら，計算公式は，＜存在＞に対する定言だからである。

ここで＜存在＞は，「表現以前」を意味する。
１つの＜存在＞に対する表現は，いろいろある。
＜存在＞に対する定言は，表現に依存するものであってはならない。

量の表現は，「単位の量と比べてどれだけ」である。
よって，量の公式の「表現に依存しない」の内容は，「単位に依存しない」である。

2.2.2「座標変換に対し不変」→ テンソル

数理は，「量」の次元拡張をする。
このとき，通常「量」と呼んでいるものは，１次元線型空間に定位される。
１次元の意味は，基底を構成するベクトルが１つということである。
量の「単位」とは，この「構成ベクトルが１つの基底」のことである。
「単位の量と比べてどれだけ」の「どれだけ」は，数で表現される「値」である。

次元拡張は，「量」「単位」「値」の概念の拡張である。
「量」は「線型空間」に，「単位」は「基底」に，「値」は「座標」になる。
量の「倍」は，ベクトルの「線型変換」になる。
「値の単位依存」は「座標の基底依存」になり，「単位換算」の計算は「基底変換・座標変換」の計算になる。
量計算は数値計算であるが，これが「行列計算」になる。

この拡張で，「量の公式」の概念・形式も拡張されることになる。
ここに，「テンソル」の登場となる。
「量の公式」は，数計算の形式である。
この「数計算の形式」を「ベクトル計算の形式」に拡張する概念，これが「テンソル」である。

量の公式は，「単位に依存しない」を要件とする。
よって，「テンソル」には，「座標変換に対し不変」の趣旨がある。
座標変換によって変わるものは，「テンソル」とは呼ばない。

実際「テンソル」は，もともと，「座標変換に対し不変」を意味にするものとして，実用数理から始まっている。
数学の「テンソル」は，その実用数理の定式化である。
その定式化は「テンソル」を「テンソル積」にする。
すると，慣習の中の「テンソル」で，この定式化からはじかれるものが出てくる。

巷の「テンソル」のテクストは，「テンソル」の意味で混乱している。
それは，「座標変換に対し不変」を「テンソル」の意味にする慣習と，数学の「テンソル」を，整理できていない様である。

2.2.3　物理法則 → テンソル方程式

物理法則は，＜存在＞の法則である。
ここで＜存在＞は，「表現以前」を意味する。
＜存在＞の法則は，いろいろに表現しても，その指しているところは同じである。

「表現に依存しない」は，「表現の変換に対して不変」と言い換えられる。

いま，物理法則がベクトルの式に写されているとしよう。
このとき，物理法則の「表現に依存しない」「表現の変換に対して不変」は，ベクトルの式の「表現に依存しない」「表現の変換に対して不変」に引き継がれる。
ベクトルの式の場合の「表現に依存しない」「表現の変換に対して不変」は，「座標に依存しない」「座標変換に対して不変」である。

物理法則をテンソルに写している場合は，ベクトルでは役不足であり，かつテンソルだと間に合うという場合である。
では，「テンソルで間に合っている」は，どうしてわかるのか。
このとき，「座標変換に対して不変」が，逆用される。
即ち，「座標変換に対して不変」を，「間に合っている」の規準 criteria にするのである。

ある種の物理学のテクストは，頻繁に「座標変換に対して不変」が出てくる。
それは，「法則として立てることが妥当」を「テンソルに写すことができる」に代え，「テンソルに写すことができる」を「座標に対して不変」に代えているということである。

物理法則をテンソルに写すとき，その写した形は「テンソル方程式」である。
その「テンソル方程式」が基底と座標で表現される前の形であれば，「座標変換に対して不変」のチェックは無用である。
基底と座標に表現した形で提示するときは，「座標変換に対して不変」のチェックが必要である。

この仕組みがわかってくると，物理学で法則を立てようとするときは，はじめからテンソル方程式の形式を目指すことになる。
作業は，テンソルの積み上げである。
テンソルの積み上げで成ったものは，それ自体テンソルである。
そして積み上げの或る段階で「= 0」にして，「テンソル方程式」が成る。

2.3「共変・反変」とは何か

2.3.1　なぜ「共変・反変」の説明から始めるのか

本題の「テンソル」に入る前に，「共変・反変」をやっておかねばならない。

テンソルは，線型代数の計算で組み上がっている計算式である。
線型代数の計算が，テンソルのモジュールというわけである。

この線型代数の計算は，行列の計算である。
行列の変項記号には，添字がつく。
そして添字が付く場所に，上下の別がある。
上付きには「反変」，下付きには「共変」の意味がある。

上下の使い分けは，ゆるがせにできないふうになっている。
これは，上下のルールがわからねば，話にならないということである。

一方，「テンソル」のテクストは，たいてい「後で説明する」のやり方をとる。
学習者は「*そのうちきちんと説明されるのだろう*」と思ってテクストについていくのだが，一向に説明されない。
「意味を問うな，慣れよ！」というわけである。
しかしこの場合，学習者はずっとモヤモヤしたままである。

そこで本テクストは，「モヤモヤのもとを最初にやっつけておく」の構成をとることにする。

2.3.2「共変・反変」の意味

「共変・反変」の起点は，特定された線型空間の基底である。
「共変・反変」は，この基底の変換に対する共変・反変である。

強調：「共変・反変」は，絶対的に決まるのではない。
　　　起点と定めた線型空間と相対的である。

「共変・反変」は，以下の順序で決まっていく：

1. 基底 $\mathbf{e}$ を構成するベクトルを，一行行列の形に並べる：

$$(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$$

ここで，添字の下付けは，「共変」の意味である。
「基底はそれ自身に対して共変」，ということである。

2. 基底変換

$$\mathbf{e} \to \mathbf{e}'$$

に対し，$\mathbf{e}'$ は「共変」である。
よって，$\mathbf{e}'$ を構成するベクトルの添字は下付けである：

$$(\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n)$$

3. つぎを，この基底変換の式とする：

$$(\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ & \cdots & \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

これから，つぎの座標変換が導かれる：

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ & \cdots & \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$n = 1$ の場合だと，

$$\mathbf{e}' = a\,\mathbf{e}$$
$$x' = a^{-1}\,x$$

これは，「基底変換に対し座標変換は反変」を表す。
そこで，座標の添字は，「反変」を表すところの上付きにする。
実際，この結論を見越して，ここまで座標の添字を上付きにしてきたわけである。

4. 行列の a^j_i は，どうなるか。

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ & \cdots & \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x^i = a^i_1 x'^1 + \cdots, + a^i_n x'^n$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = a^i_j$$

$a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$ は，x^i と共変，x^j と反変。
「x^i と共変」は「基底変換と反変」，「x^j と反変」は「基底変換と共変」。
これを，「i は基底変換と反変」「j は基底変換と共変」と読んで，i を「反変」を表すところの上付けにし，j を「共変」を表すところの下付けにする。
実際，この結論を見越して，ここまで変換行列の項の添字をこのようにしてきたわけである。

2.3.3　添字上下ルールの意味

乗除の数計算は，便法として，分数の形を用いる。
このとき，「共変」の係数を分子に配し，「反変」の係数を分母に配していることになる。

添字の上下は，数計算での分子分母と対応している。
計算は，係数を分子分母のどちらに配するかで間違うことができない。
よって，添字の上下の別は，気分の問題ではなく，ほんとうに間違うことができないのである。

こういうわけで，添字の上下ルールがわかるとは，数計算の分母分子の意味がわかるということであり，そしてそれは「共変・反変」がわかるということなのである。

> 数計算の分子分母の意味をきちんと考えることは，まずない。
> 「テンソル」論は，これをするところである。
> そこで，「共変・反変」が基本概念になる。
> 「テンソル」論がなぜこのような内容になるかというと，繰り返すが，「テンソル」とは計算式のことだからである。

x^i, x_i タイプの文字記号は，これが座標ベクトルの成分であることを表す。
添字はどの基底ベクトルの係数であるかを示す。
そして添字の上下位置は，計算式において分子分母のどちらに配されるかを示す。

a_i^j タイプの文字記号は，これが倍作用であること表す。
添字は，つぎの作用であることを示す：

- 上付き i の座標成分との積では，これに倍して，上付き j の成分にする。
  計算式では，分子の数に対する倍であり，結果も分子に留まる。
- 下付き j の成分との積では，これに倍して，下付き i の成分にする
  計算式では，分母の数に対する倍であり，結果も分母に留まる。

2.4 「テンソル」のテクストとは？

2.4.1　＜読んでわからない＞の理由

「テンソル」の学習では，テクスト事情が学習者を混迷させる最大要因になる。
テクスト事情——それは，学習テクストの名に値するものが存在しないということである。

学習者へのアドバイスでは，これをいちばんに言うことになる。
なぜなら，彼らは自分の学習困難をテクストのせいにすることを知らない者たちだからである。

学習テクストのダメの規準は，＜読んでわからない＞である。
即ち，読んでわからないのは，もともとダメなテクストということである。
ひとは「読んでわからないのは，内容が難しいから」と思いがちだが，それは間違いである。

読んでわからない「テンソル」テクストは，書き手の問題である。
読者に問題はない。
読者は，「テンソル」のテクストを読む能力をもつ者だからである。——「テンソル」のテクストを読む能力の無い者は，「テンソル」のテクストを読もうとは端から思わない者である。

読んでわからないテクストの書き手は，つぎの２タイプに別れる：

A. 自分がわかっていないことを書く
B. 読んでわかるテクストを書けない

A. **自分がわかっていないことを書く**

これは，さらにつぎの３タイプに分かれる：

a1. わかっているつもり
a2. わかっているふりをしたい
a3. 試行——いろいろ書いているうちにわかってくることを期す

B. **読んでわかるテクストを書けない**

これは，さらにつぎの２タイプに分けられる：

b1.「読んでわかるテクスト」の概念を，端から持たない
b2.「読んでわかるテクスト」の概念は持っているが，書けない

数学者は，ごく少数の例外を除いて，このBタイプになる。
さらに，だいたいが b1 タイプである。
数学の授業はきまって学習者をドロップアウトさせる授業になるが，それは数学者が

こういうタイプの者だからである。
彼らは，授業不成立の原因を学習者に帰す者である。

ただし，彼らを弁護して言うならば，これは「分野的個性」というものである。
——能力は，トレードオフ（「*あちらを立てればこちらが立たず*」）である！

2.4.2 「テンソル」のテクストの最終章は？

数学のテクストは，どういうつもりでこれを書いているのかがわからないものが多い。
理由は，それが講義録だからである。
講義録は，そのときの自分の＜わかったつもり＞を書いたものであり，アイデア (思いつき) のメモである。
これが生のまま，テクストとして出てくる。

講義録は，作品ではない。
「作品」にするとは，受け手を＜他者＞に措定することである。

「作品」は，最終章に向かって書かれる。,
では，「テンソル」のテクストは，なにが最終章になるのか。

「テンソル」は，物理法則の何たるかを考える中から，概念化されてくるものである。
したがって，「テンソル」の学習テクストの最終章は，「物理法則」である。

物理法則は，《非線型のものに対し局所線型を捉え，この線型性を表す》というものになる。
線型代数の概念である「テンソル」が物理法則の形式になるのは，この段階を踏んでいるからである。

したがって，「物理法則」から「テンソル」への還元的下降を述べることができるためには，そして「テンソル」が「物理法則」に終着するためには，「局所線型性」の主題を間に挟まねばならない。
これは，分野として「可微分多様体」の話になる。

「テンソル」のテクストは，「直線座標・曲線座標──両者間の変換」の章を設ける。
この章の意味は，「可微分多様体」の内容に入るということである。
しかし，これがうまくいかない。
「直線座標・曲線座標──両者間の変換」の章は，意味不明の章になる。

実際，「テンソル」から「可微分多様体」に入って行くというのは，構成的に無理なのである。
「可微分多様体」は，大きな主題である。
これをテクストの一定分量の中にコンパクトに収容しようとしたら，わけのわからないものになる。

テクストに仕立てるために無理矢理収容するというのは，書き手の勝手な都合である。
それはテクストになっていない。

最終章は「物理法則」だとは言っても，シーケンシャルな構成でそうなるということではない。
「可微分多様体」の別テクストを以て，＜仕切り直し＞をしなければならないということである。
そしてこのときの「テンソル」の登場の仕方は，「テンソル場」である。

本テクストは，『「テンソル」とは何か』のテクストとして，＜仕切り直し＞につなぐまでを内容にする。
そしてこの内容を以て，テクストの終章を，「量の公式の一般化形式」と定める。

「量の公式の一般化形式」の内容は，量 (1 次元線型空間) の一般次元化である。
この一般次元化にともない，量公式の形，量計算法が一般化される。
章の標題は，「テンソル積の座標・線型写像・座標変換」である。

3　小学数学に出てくるテンソルから

3.1「タテ × ヨコ＝面積」

3.1.1　テンソル「タテ⊗ヨコ ≅ 面積」

「タテ×ヨコ＝面積」に対しては，つぎの構成要素を見る：

1. 実ベクトル空間　U, V, W
   - U：タテ(長さ) 全体
   - V：ヨコ(長さ) 全体
   - W：面積全体
2. 双線型写像 $\phi : U \times V \to W$
   - ϕ：(タテ $\mathbf{x}$, ヨコ $\mathbf{y}$) $\longmapsto$ タテ $\mathbf{x}$, ヨコ $\mathbf{y}$ の長方形の面積

ここで，量をベクトル——大きさと向き——に見る方法は，量に「増」をつける：

例えば，「2 cm」→「2 cm増」

「双線型写像 $\phi : U \times V \to W$ 」の意味は：

- U の元 $\mathbf{u}$ を固定したときの写像
  $$\mathbf{x} \longmapsto \phi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in V)$$
  は，V から W への線型写像
- V の元 $\mathbf{v}$ を固定したときの写像
  $$\mathbf{x} \longmapsto \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (\mathbf{x} \in U)$$
  は，U から W への線型写像

実際，小学数学では，つぎのことが指導される：

「タテの長さが２倍，３倍，‥‥ になれば，
長方形の面積も２倍，３倍，‥‥ になる。
ヨコについても同様。」

つぎは，集合 $U \times V$ 上の同値関係になる：

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \ : \ \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$$

この同値関係による $U \times V$ の商集合——同値類の集合——を「$U \bigotimes V$」で表す。
また，$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が代表元になる同値類を，「$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$」で表す。

「$U \bigotimes V$」は，即ち「タテ⨂ヨコ」である。
ここでは，長方形の面積が同じになる (タテ, ヨコ) を類別したわけである。
例えば「タテ３cm，ヨコ４cm」と「タテ２cm，ヨコ６cm」は，長方形の面積が同じになるから，「３cm ⨂４cm ＝ ２cm ⨂６cm」となる。

$U \bigotimes V$ は，つぎの算法を以て，実ベクトル空間になる：

$$\xi\,(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (\xi\,\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes (\xi\,\mathbf{y}) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}' \otimes \mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \otimes \mathbf{y}$$
$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}' = \mathbf{x} + (\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}')$$

また，写像：

$$\begin{aligned} U \times V &\Longrightarrow U \otimes V \\ (x,\ y) &\longmapsto \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \end{aligned}$$

は，「員にそれが属するクラスを対応させる」という写像であり，「標準写像 canonical map」と呼ばれる──略記「can」。
そして，これは線型写像になる。

最後の仕上げが，つぎの図式を可換にする線型写像 $\bar{\phi}$ である：

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & W \\ U \otimes V \arrow[ur, dashed, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

要素の対応で書くと：

$$\begin{tikzcd} (x, y) \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{can.}"'] & \phi(x, y) \\ x \otimes y \arrow[ur, dashed, mapsto, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

この写像は，$U \otimes V$ と W の同型写像になる。
即ち，タテ $\otimes$ ヨコ と **面積** の同型写像になる。

この同型が，「タテ × ヨコ ＝ 面積」と読まれる。
同型「タテ$\otimes$ヨコ ≈ 面積」の読みが「タテ × ヨコ ＝ 面積」というわけである。

3.1.2 面積計算

長方形の面積は，つぎの可換図式の中の同型写像 $\bar{\phi}$ によって，タテ$\otimes$ヨコと同一視されるものとなった：

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & W \\ U \otimes V \arrow[ur, dashed, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (x, y) \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{can.}"'] & \phi(x, y) \\ x \otimes y \arrow[ur, dashed, mapsto, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

ところで，長方形の面積は，タテの長さの数値とヨコの長さの数値の積で計算される。
即ち，長さの単位 $\mathbf{L}$ と面積の単位 $\mathbf{S}$ を

$\mathbf{S}$ ＝ 辺の長さが $\mathbf{L}$ の正方形の面積

の関係になるように択ったとき，

タテの長さ　：$\xi\mathbf{L}$
ヨコの長さ　：$\eta\mathbf{L}$
長方形の面積：$\zeta\mathbf{S}$

の間に，つぎの関係が成り立つ：

$$\xi \times \eta = \zeta$$

小学数学だと，長さの単位「cm」に対しては面積の単位「cm^2」(cm 四方の正方形の面積) を暗黙に択り，長さの単位「m」に対しては面積の単位「m^2」(m 四方の正方形の面積) を暗黙に択るというふうにして，この数値計算を指導する：

教師：「タテ $2cm$, ヨコ $3cm$ の長方形の面積は？」
生徒：「$2 \times 3 = 6$」
　　　「だから，$6cm^2$」

数学の「×」は数の積の記号であるから，「$2cm \times 3cm = 6cm^2$」と書いたら間違いである。
しかし，このことを知らずに「$2cm \times 3cm = 6cm^2$」とやってしまう者の方が，

むしろありふれている。
彼らにその間違いを説明することは，難しい。
「テンソル積」を教えねばならないからである。

「タテ $2cm$, ヨコ $3cm$ の長方形の面積は？」の計算は，

$$\mathbf{2cm} \otimes \mathbf{3cm} = (2 \times 3)(\mathbf{cm} \otimes \mathbf{cm})$$

となる。
要点は，二つの「積」が現れるということである——「×」と「⊗」。

小学数学で「×」と区別しつつ「⊗」を教えることは，不可能である。
そこで，小学数学は量計算をつぎのように指導しているわけである：

《数値の積を計算し，その結果に単位をつける》

3.1.3「公式」——「単位は何でもあり」

小学数学では，「タテ × ヨコ ＝ 面積」を「公式」として覚えるふうになっている。

ところで，この言い回しを「公式」にするということは，「単位は何でもあり」にしているということである。
したがって，これを「公式」として使えるということには，「単位は何でもあり」の意味を知っているということが含まれる。
さて，「単位は何でもあり」の意味は？

「単位は何でもあり」の意味は，つぎの通りである：

《ある長さの単位で「タテ×ヨコ」が同じになる長方形同士は，
どんな長さの単位でも「タテ×ヨコ」が同じになる》

例えば，
タテの長さの単位：$\mathbf{L}_1$
ヨコの長さの単位：$\mathbf{L}_2$
に対し，

$$\xi^1\,\mathbf{L}_1 \otimes \xi^2\,\mathbf{L}_2 = \eta^1\,\mathbf{L}_1 \otimes \eta^2\,\mathbf{L}_2$$

であったとする。

ここで，別の単位をとる：
タテの長さの単位：$\mathbf{L}'_1$
ヨコの長さの単位：$\mathbf{L}'_2$
そして，この単位に対して，つぎのようになるとする：

$$\begin{aligned} \xi^1\,\mathbf{L}_1 &= \xi'^1\,\mathbf{L}'_1 \quad & \xi^2\,\mathbf{L}_2 &= \xi'^2\,\mathbf{L}'_2 \\ \eta^1\,\mathbf{L}_1 &= \eta'^1\,\mathbf{L}'_1 \quad & \eta^2\,\mathbf{L}_2 &= \eta'^2\,\mathbf{L}'_2 \end{aligned}$$

「単位は何でもあり」とは，この場合つぎが成り立つということである：

$$\xi'^1\,\mathbf{L}'_1 \otimes \xi'^2\,\mathbf{L}'_2 = \eta'^1\,\mathbf{L}'_1 \otimes \eta'^2\,\mathbf{L}'_2$$

そして，実際これは成り立つ：

$$\begin{aligned} & \xi'^1\,\mathbf{L}'_1 \otimes \xi'^2\,\mathbf{L}'_2 \\ = \ & \xi^1\,\mathbf{L}_1 \otimes \xi^2\,\mathbf{L}_2 \\ = \ & \eta^1\,\mathbf{L}_1 \otimes \eta^2\,\mathbf{L}_2 \\ = \ & \eta'^1\,\mathbf{L}'_1 \otimes \eta'^2\,\mathbf{L}'_2 \end{aligned}$$

3.1.4　単位の換算

「タテ×ヨコ＝面積」を公式として使う計算では，「単位の換算」をするときがある。

いま
　　タテの長さの単位：$\mathbf{L}_1$
　　ヨコの長さの単位：$\mathbf{L}_2$
に対し，タテ，ヨコの長さがそれぞれ ξ^1, ξ^2 の長方形を考える。
これの面積は，

$$\xi^1\,\mathbf{L}_1 \otimes \xi^2\,\mathbf{L}_2$$

である。

ここで，別の単位をとる：
　　タテの長さの単位：$\mathbf{L'}_1$
　　ヨコの長さの単位：$\mathbf{L'}_2$
そして，もとの単位との関係をつぎのとおりとする：

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1 &= b^1\,\mathbf{L'}_1\\ \mathbf{L}_2 &= b^2\,\mathbf{L'}_2\end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned}&\xi^1\,\mathbf{L}_1 \otimes \xi^2\,\mathbf{L}_2\\ =\;&\xi^1\,(b^1\,\mathbf{L'}_1) \otimes \xi^2\,(b^2\,\mathbf{L'}_2)\\ =\;&(b^1\,\xi^1)\,\mathbf{L'}_1 \otimes (b^2\,\xi^2)\,\mathbf{L'}_2\\ =\;&(b^1\,\xi^1 \times b^2\,\xi^2)\,(\mathbf{L'}_1 \otimes \mathbf{L'}_2)\end{aligned}$$

例.　タテ，ヨコの長さがそれぞれ $2m$, $3m$ の長方形の面積を，単位 cm^2 で求める。
　単位換算は，

$$\mathbf{m} = 100\,\mathbf{cm}$$

　よって，

$$\begin{aligned}&2\,\mathbf{m} \otimes 3\,\mathbf{m}\\ =\;&2\,(100\,\mathbf{cm}) \otimes 3\,(100\,\mathbf{cm})\\ =\;&(2 \times 100 \times 3 \times 100)\,(\mathbf{cm} \otimes \mathbf{cm})\\ =\;&\text{「}60000\,cm^2\text{」}\end{aligned}$$

3.1.5　(2, 0) テンソル

長方形の「面積」は，テンソル積「長さ⊗長さ」との同型を以て，(2, 0) テンソルということになる。

　　前の「2」は，「反変は<長さ>が２つ」の「2」，
　　後ろの「0」は，「共変は無し」の「０」。

計算式「長さ×長さ」が「分子側は<長さ>が２つ，分母側は無し」であることを指す (2, 0) である。

3.2「タテ × ヨコ × タカサ＝体積」

3.2.1　テンソル「タテ⊗ヨコ⊗タカサ ≅ 体積」

「タテ×ヨコ×タカサ＝体積」のテンソルは，「タテ×ヨコ＝面積」のテンソルをやった後は，特段取り上げずともよいものである。
ただ，項が一つ増えることで記述がどのように増えるかは，見ておく方がよい。
ということで，「タテ×ヨコ×タカサ＝体積」も，一応きちんと押さえておく。

「タテ×ヨコ×タカサ＝体積」に対しては，つぎの構成要素を見る：

1. 実ベクトル空間　U_1, U_2, U_3
   U_1：タテ(長さ) 全体
   U_2：ヨコ(長さ) 全体
   U_3：タカサ(長さ) 全体
   W：体積全体
2. 複線型写像 $\phi : U_1 \times U_2 \times U_3 \rightarrow W$
   ϕ : (タテ $\mathbf{x_1}$, ヨコ $\mathbf{x_2}$, タカサ $\mathbf{x_3}$)
   $\longmapsto$ タテ $\mathbf{x}_1$, ヨコ $\mathbf{x}_2$ タカサ $\mathbf{x}_3$ の直方体の体積

ここで，量をベクトル——大きさと向き——に見る方法は，量に「増」をつける：

例えば，「2 cm」→「2 cm増」

「複線型写像 $\phi : U_1 \times U_2 \times U_3 \rightarrow W$ 」の意味は：

- U_2 の元 $\mathbf{u}_2$ と U_3 の元 $\mathbf{u}_3$ を固定したときの写像
  $\mathbf{x}_1 \longmapsto \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \quad (\mathbf{x}_3 \in U_1)$
  は，U_3 から W への線型写像
- U_3 の元 $\mathbf{u}_3$ と U_1 の元 $\mathbf{u}_1$ を固定したときの写像
  $\mathbf{x}_2 \longmapsto \phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_3) \quad (\mathbf{x}_1 \in U_2)$
  は，U_3 から W への線型写像
- U_1 の元 $\mathbf{u}_1$ と U_2 の元 $\mathbf{u}_2$ を固定したときの写像
  $\mathbf{x}_3 \longmapsto \phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_3) \quad (\mathbf{x}_3 \in U_3)$
  は，U_3 から W への線型写像

実際，小学数学では，つぎのことが指導される：

「タテの長さが２倍，３倍，‥‥ になれば，
直方体の体積も２倍，３倍，‥‥ になる。
ヨコ，タカサについても同様。」

つぎは，集合 $U_1 \times U_2 \times U_3$ 上の同値関係になる：

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \sim (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3)$$
$$: \ \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$$

この同値関係による $U_1 \times U_2 \times U_3$ の商集合——同値類の集合——を「$U_1 \bigotimes U_2 \bigotimes U_3$」で表す。
また，$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ が代表元になる同値類を，「$\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3$」で表す。

「$U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$」は，即ち「タテ⨂ヨコ⨂タカサ」である。
ここでは，直方体の体積が同じになる (タテ, ヨコ, タカサ) を類別したわけである。

$U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$ は，つぎの算法を以て，実ベクトル空間になる：

$$\begin{aligned}
\xi(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3) &= (\xi\,\mathbf{x}_1) \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 \\
&= \mathbf{x}_1 \otimes (\xi\,\mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{x}_3 \\
&= \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes (\xi\,\mathbf{x}_3) \quad (\xi \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}'_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1) \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 \\
&\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}'_2 \otimes \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 \otimes (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}'_2) \otimes \mathbf{x}_3 \\
&\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_1) \otimes \mathbf{x}_2 \otimes (\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}'_3)
\end{aligned}$$

また，写像：

$$\begin{aligned}
&U_1 \times U_2 \times U_3 \longrightarrow U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 \\
&(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \longmapsto \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3
\end{aligned}$$

は，員にそれが属するクラスを対応させる写像——「標準写像 canonical map」——である。

そして，つぎの図式を可換にする写像 $\bar{\phi}$ は，線型空間 $U_1 \bigotimes U_2 \bigotimes U_3$ と W の同型写像になる：

$$\begin{tikzcd}
U_1 \times U_2 \times U_3 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & W \\
U_1 \bigotimes U_2 \bigotimes U_3 \arrow[ur, dashed, "\bar{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

要素の対応で書くと：

$$\begin{tikzcd}
(x_1, x_2, x_3) \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "\text{can.}"'] & \phi(x_1, x_2, x_3) \\
x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \arrow[ur, dashed, mapsto, "\bar{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

この同型が，「タテ × ヨコ × タカサ = 体積」と読まれる。
同型「タテ⨂ヨコ⨂タカサ ≈ 体積」の読みが「タテ × ヨコ × タカサ = 体積」というわけである。

3.2.2　(3, 0) テンソル

直方体の「体積」は，テンソル積「長さ⊗長さ⊗長さ」との同型を以て，(3, 0) テンソルということになる。

前の「3」は，「反変は＜長さ＞が３つ」の「3」，
後ろの「0」は，「共変は無し」の「0」。

計算式「長さ×長さ×長さ」が「分子側は＜長さ＞が３つ，分母側は無し」であることを指す (3, 0) である。

3.3 「距離 ÷ 時間＝速さ」

3.3.1　正規の計算法の確認

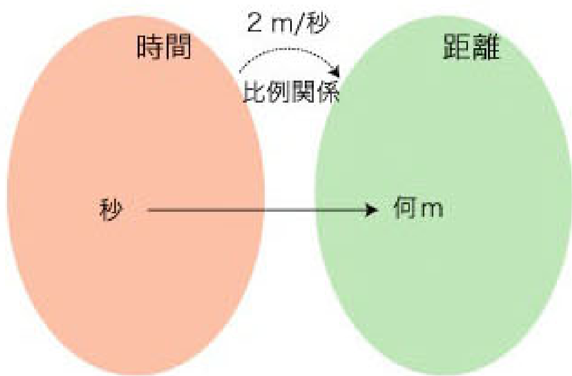
「距離÷時間＝速さ」の「÷」は，数の「÷」である。
実際，「距離÷時間＝速さ」は，つぎがこれの意味である：

「速さの単位を時間，距離の単位に合わせると，
(距離の数値) ÷ (時間の数値) = (速さの数値) が成り立つ」

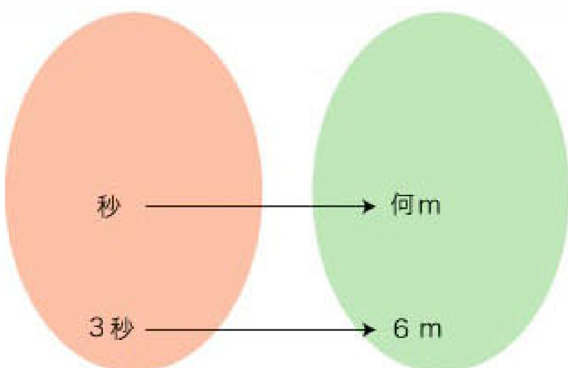
ここで，「速さの単位を時間，距離の単位に合わせる」とは，時間の単位 $\mathbf{u}_t$，距離の単位 $\mathbf{u}_d$ に対し，速さの単位を「$\mathbf{u}_t$ 当たり $\mathbf{u}_d$ ──比例関数：時間 → 距離であって，$\mathbf{u}_t$ に $\mathbf{u}_d$ が対応するもの──にとること。

(距離の数値) ÷ (時間の数値) = (速さの数値) の計算は，つぎのようになる。
──時間，距離，速さの単位を 秒，m，m/秒 とし，「3秒で6mは，何m/秒？」の場合を示す：

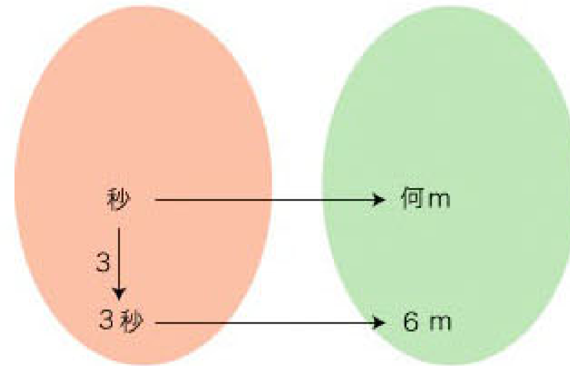
「何m/秒」の意味



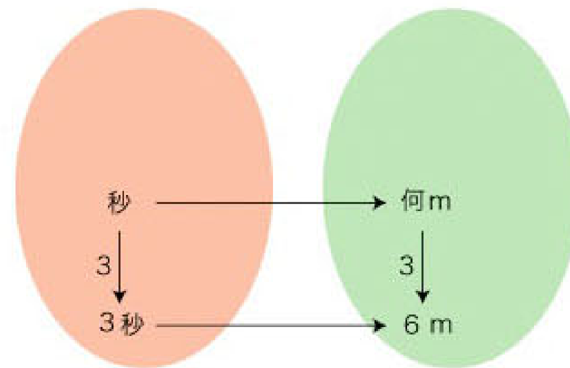
「3秒で6m」



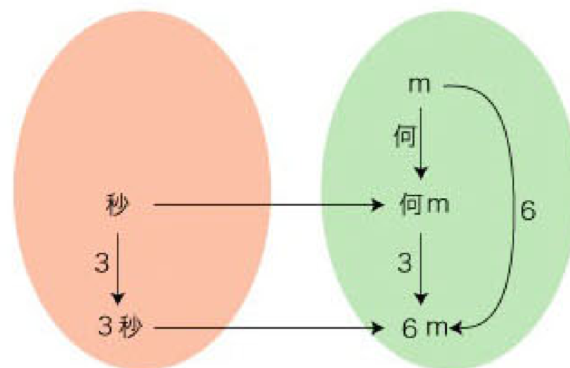
「3秒」の意味 (秒の3倍)



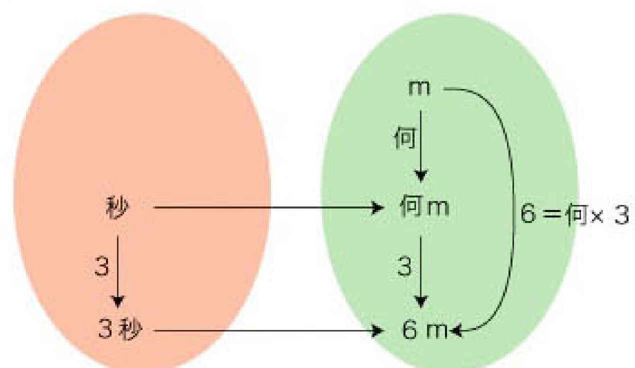
「比例関係」の意味 (3倍には3倍が対応)



「6m」「何m」の意味（mの2倍，mの何倍）



「×」の意味 (倍の合成)



「6＝何×3」より「何＝6÷3」

一方，ひとはこんな真丁寧な計算はしない――この計算を知らない/できない。
ふつうは，数のわり算一発である。

3.3.2「双対」の導入

長方形の面積の公式は，「タテ×ヨコ」で，掛け算の形。
速さの公式は，「距離÷時間」と，割り算の形。
さて，これは，公式には掛け算タイプと割り算タイプの二つがあるということなのか？

こう問うのは，掛け算か割り算かは，本質的でないように思われるからである。
即ち，量の設定を変えれば，割り算は掛け算に変わるのではないか？
「距離÷時間」の場合だと，時間のとらえを何か別の「時間*」に変えて，速さの公式を「時間* ×距離」にできないか，ということである。

このような考えをもつのは，要するに，割り算を無くしたいからである。
なぜか。
これができれば，掛け算と割り算でなる公式は，掛け算のみの形にできる。
掛け算のみの形になった公式は，「テンソル」になる。
そうすると，テンソルの構造論として，公式の構造を主題化できることになる。

係数体Ｋの量Ｑの単位 $\mathbf{u}$ からは，つぎの二つの関数が導かれる：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^{+} &: K \longrightarrow Q \\
&\quad k \longmapsto k\,\mathbf{u} \\
\mathbf{u}^{*} &: Q \longrightarrow K \\
&\quad k\,\mathbf{u} \longmapsto k
\end{aligned}
$$

Ｑは，体Ｋ上の線型空間である。
Ｋは，Ｋ上の線型空間になる。

さらにつぎが，Ｋ上の線型空間になる：
　Ｋ からＱへの線型写像全体 $Hom(K, Q)$
　Ｑ からＫへの線型写像全体 $Hom(Q, K)$
そして，$\mathbf{u}^{+} \in Hom(K, Q)$, $\mathbf{u}^{*} \in Hom(Q, K)$ である。

$\mathbf{u}^{+}$ と $\mathbf{u}^{*}$ は，互いに逆関数である。
この二つを「双対」と見る。
併せて，$Hom(K, Q)$ と $Hom(Q, K)$ を「双対」と見る。

つぎは，同型写像である：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}^{+}\,; &\quad Q \longrightarrow Hom(K, Q) \\
\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}^{*}\,; &\quad Q \longrightarrow Hom(Q, K)
\end{aligned}
$$

数学の慣行では，$Hom(K, Q)$ をＱと同一視する。
そして $Hom(Q, K)$ の方を，Q* で表し，Ｑの双対と呼ぶ。

註：この慣行は，「双対」の意味——その形式——を見え難くするものであり，好ましいものではない。

はじめの問いに戻る：
《時間のとらえを何か別の「時間*」に変えて，
速さの公式を「時間* ×距離」にできないか？》

答えは，「できる」でああある。
実際，つぎのものが，求める「時間*」である：，

$Hom(\text{時間}, \mathbb{R})$

——「テンソル「時間* ×距離＝速さ」」へ続く

3.3.3　テンソル「距離⊗時間 * ≅ 速さ」

速さは，時間と距離の比例関係である。
時間と距離を (実)線型空間と見なせば，速さは線型写像である。
この線型写像全体の集合は，Hom(時間, 距離) で表される。
そしてこの Hom(時間, 距離) も，(実)線型空間になる。

いまからしようとすることは，速さをテンソル「距離⊗時間*」にすることである。
ここで，「時間*」は，つぎのものである：

$Hom(\text{時間}, \mathbb{R})$

速さは，「距離÷時間」ではテンソルにならないが，「距離×時間*」に代えることでテンソルになる，というわけである。

距離，時間，速さを，(実)ベクトル空間 D, T, V とする。
つぎの関数は，双線型写像である：

$$\phi : D \times T^* \longrightarrow V;$$
$$(d, t^*) \longmapsto \langle t,\ d\rangle \quad (t \in T, d \in D)$$

ここで，$\langle t,\ d\rangle$ は，「時間 t で距離 d の速さ」を表す。

そこで，つぎの可換図式が導かれ，且つこの中の $\bar{\phi}$ が同型写像になる：

$$\begin{tikzcd} D \times T^* \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & V \\ D \otimes T^* \arrow[ur, dotted, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

要素の対応で書くと：

$$\begin{tikzcd} (d, t^*) \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{can.}"'] & \langle t, d\rangle \\ d \otimes t^* \arrow[ur, dotted, mapsto, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

こうして，「距離÷時間＝速さ」が「距離×時間*＝速さ」になった。

例，「２秒で６ｍの速さは？」

「距離÷時間＝速さ」だと，

$$
\begin{aligned}
&<2\text{秒},\ 6\,\text{m}> \\
&=<2^{-1}(2\text{秒}),\ 2^{-1}(6\,\text{m})> \\
&=<(2^{-1}\times 2)\text{秒},\ (2^{-1}\times 6)\text{m}> \\
&=<\text{秒},\ (6\div 2)\text{m}> \\
&=「(6\div 2)\ \text{m}/\text{秒}」
\end{aligned}
$$

「距離×時間*＝速さ」だと

$$
\begin{aligned}
&6\,\text{m} \otimes (2\text{秒})^* \\
&=6\,\text{m} \otimes (2^{-1}\ \text{秒}^*) \\
&=(6\times 2^{-1})\ (\text{m} \otimes \text{秒}^*) \\
&=(6\div 2)\ (\text{m} \otimes \text{秒}^*) \\
&=「(6\div 2)\ \text{m}/\text{秒}」
\end{aligned}
$$

備考：「(2秒)*」は，つぎの写像：

$$\xi(2\text{秒}) \longmapsto \xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

そしてこれは，つぎの写像──即ち「2^{-1} 秒*」──と同じ：

$$\xi\,\text{秒} \longmapsto 2^{-1}\,\xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

よって，「$(2\text{秒})^* = 2^{-1}$ 秒*」。

3.3.4　Hom(時間 , 距離) ≅ 距離⊗時間 *

速さは，時間と距離の比例関係である。
時間と距離を (実)線型空間と見なせば，速さは線型写像である。
この線型写像全体の集合は，Hom(時間, 距離) で表される。
そしてこの Hom(時間, 距離) も，(実)線型空間になる。

速さをテンソル 距離⊗時間* に仕立てるとは，つぎの同型を立てることであった：

Hom(時間, 距離) ≅ 距離⊗時間*

このときの同型対応は：

$$\langle t,\ d\rangle \longleftrightarrow d \otimes t^*$$

ここで，$\langle t,\ d\rangle$ は，「時間 t に対し距離 d の速さ」を表す。

3.3.5　(1,1) テンソル

「速さ」は，テンソル積「距離⊗時間*」との同型を以て，(1, 1) テンソルということになる。

　前の「1」は，「反変は＜距離＞が１つ」の「1」，
　後ろの「1」は，「共変は＜時間*＞が１つ」の「1」。

計算式「距離÷時間」が「分子側は＜距離＞が１つ，分母側は＜時間＞が１つ」であることを指す (1, 1) である。

3.4「速さ × 時間＝距離」

3.4.1　テンソル「距離⊗時間 * ⊗時間 ≅ 距離」

「距離÷時間＝速さ」を取り上げた後に「速さ×時間＝距離」を取り上げるのは，「単位の縮約」を主題化するためである。

量計算では，「*説明できないが，これで巧くいく*」ということで，単位をつけた式を立て，同じ単位を「約分」するということが，ふつうにやられている。
「速さ×時間＝距離」だと，つぎのようなぐあいである：

　　2 m/秒 × 3 秒 ＝ (2 × 3) m

この「単位の縮約」を数学化しようとすると，「テンソル積」の内容になる。
このことを，「速さ×時間＝距離」を以て解説しようというわけである。

速さは，テンソル積 距離⊗時間* になった。
「速さ×時間＝距離」には，つぎのテンソル積 距離⊗時間*⊗時間 が対応する。
ここで 距離⊗時間*⊗時間 と距離の同型対応は，つぎのようになる：

$$\begin{tikzcd}
D \times T^* \times T \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & D \\
D \otimes T^* \otimes T \arrow[ur, dotted, "\bar{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(d, t_1^*, t_2) \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "\text{can.}"'] & t_1^*(t_2)\, d \\
d \otimes t_1^* \otimes t_2 \arrow[ur, dotted, mapsto, "\bar{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{t}_1^*(\mathbf{t}_2)$ は，$\mathbf{t}_1$ を単位にして $\mathbf{t}_2$ を測ったときの値 (スカラー)。
これを $\mathbf{d}$ に倍したのが，$\mathbf{t}_1^*(\mathbf{t}_2)\,\mathbf{d}$。

例として，「2 m/秒では，3 秒で何m」を計算する。

「速さ×時間＝距離」を公式として適用するときは，時間と距離の単位に対し速さの単位が整合していることを確認した上で，「(2×3)m」を出す。

《公式「速さ×時間＝距離」は，テンソル積「距離⊗時間*⊗時間」だ》の意味は，
「2 m/秒」の **2m**⊗秒* と 3 秒のテンソル積
　　　2m⊗秒* ⊗ 3秒

を立てれば，後は

1. ⊗ の文法
2. 距離⊗時間*⊗時間 と距離の同型：$\mathbf{d} \otimes \mathbf{t}_1^* \otimes \mathbf{t}_2 \longleftrightarrow \mathbf{t}_1^*(\mathbf{t}_2)\,\mathbf{d}$

に順って，距離「(2×3)m」が出るということである。

実際，
　　2 m ⊗ 秒* ⊗ 3秒
　　= **2 m** ⊗ (秒* ⊗ 3秒)
　　= (秒*(3秒)) (**2 m**)
　　= 3 (**2 m**)
　　= (2 × 3) **m**

（途中，「2×3」ではなく「3×2」が出そうになったのは，前半の式を<倍を前に書く欧米流儀>で書いたためである。）

3.4.2　単位の「約分」

物理学や工学の中で「２m/秒では，３秒で何m」を計算するときは，つぎのようになる：

　　「２m/秒 ×３秒」の上下の「秒」を「約分」して，
　　　以下「＝２m ×３＝（2×3)m」。

単位の「約分」をするわけである。

この「約分」は，どんなロジックになるか？
この問いを立てるとき，「テンソル積」が答えになるというわけである。

実際，このときの「秒の約分」は，距離⊗時間*⊗時間 と距離の同型：

$$\mathbf{d} \otimes \mathbf{t}_1^* \otimes \mathbf{t}_2 \longleftrightarrow \mathbf{t}_1^*(\mathbf{t}_2)\,\mathbf{d}$$

の適用ということになる。

一般に，「単位の縮約」が起こる構造は，つぎのものである：

《テンソル積を構成する線型空間の中に，互いに双対な二つの線型空間が含まれる》

「速さ×時間＝距離」の場合は，時間⊗時間* が生じ，時間の単位の「縮約」が成ったわけである。

3.4.3「反変・共変」

ここでは，時間とこれの双対空間の時間* をセットにして，「反変・共変」の概念の押さえをする。

時間の単位 $\mathbf{s}$ に対し，$\mathbf{t} = x\,\mathbf{s}$ であるとする。
ここで，単位の変換をする：

$$\mathbf{s}' = a\,\mathbf{s}$$

$\mathbf{s}'$ に対し $\mathbf{t} = x'\,\mathbf{s}'$ となるとき，

$$x\,\mathbf{s} = x'\,\mathbf{s}' = x'\,a\,\mathbf{s} \implies x' = \frac{1}{a}x$$

単位が a 倍になると，測定値は a^{-1} になる。

単位変換に対し，双対単位はどう変化するか。
$\mathbf{t} = x\,\mathbf{s} = x'\,\mathbf{s}' = x'\,a\,\mathbf{s}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s}'^*(\mathbf{t}) = \mathbf{s}'^*(x'\,\mathbf{s}') = x'\,\mathbf{s}'^*(\mathbf{s}') = x' \\
&\mathbf{s}^*(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^*(x\,a\,\mathbf{s}) = x\,a\,\mathbf{s}^*(\mathbf{s}) = x\,a \\
&\quad \implies \mathbf{s}'^*(\mathbf{t}) = a^{-1}\mathbf{s}^*(\mathbf{t}) \\
&\quad \implies \mathbf{s}'^* = a^{-1}\mathbf{s}^*
\end{aligned}$$

即ち，時間の単位が a 倍になると，これの双対単位は a^{-1} 倍になる。

双対単位による測定値は，どうか。$x\,\mathbf{s}^* = x'\,\mathbf{s}'^*$ のとき，

$$\begin{aligned}
&x' = x'\,(\mathbf{s}'^*(\mathbf{s}')) = x'\,(\mathbf{s}'^*(a\,\mathbf{s})) = (x'\,\mathbf{s}'^*)(a\,\mathbf{s}) \\
&= (x\,\mathbf{s}^*)(a\,\mathbf{s}) = x\,(\mathbf{s}^*(a\,\mathbf{s})) = (x\,a)\,(\mathbf{s}^*(\mathbf{s})) \\
&= x\,a
\end{aligned}$$

即ち，時間の単位が a 倍になると，これの双対単位による測定値は a 倍になる。

時間の単位の a 倍に対し a 倍になることを「共変」，a^{-1} 倍になることを「反変」，ということにすると，つぎのようになる：

　時間の単位の変化に対し，
　　時間の単位の変化は共変，時間の単位による測定値の変化は反変
　　時間* の単位の変化は反変，時間* の単位による測定値の変化は共変

基底や座標に添字をつけることをここまでやってきているが，上付け・下付けの別は，共変・反変を規準につけてきている。

ここで，《「共変・反変」を規準に，添字を付ける》を，一般の n 次元ベクトル空間 V とこれの双対空間 V^* に対して考える (量は 1 次元ベクトル空間である)。

このときの「量 → n 次元ベクトル空間」は，つぎがこれの内容である：

1. 単位 $\mathbf{u}$
   → 基底 $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$
2. $\mathbf{u}$ に対する $\mathbf{x}$ の 値 x (数)
   → $\mathbf{e}$ に対する $\mathbf{x}$ の 座標
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$
3. $\mathbf{u}$ の変換 : $\mathbf{u}' = a\,\mathbf{u}$
   → $\mathbf{e}$ の変換：
$$(\mathbf{e}'_1 \ \cdots \ \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ & \cdots & \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$
4. 単位変換に伴う値変換 : $x' = a^{-1}x$
   → 基底変換に伴う座標変換
$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ & \cdots & \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}$ の変換に対し，$\mathbf{e}$ 自身は共変である。
このことを，$\mathbf{e}$ を構成するベクトルの添字を下付けにすることで表している。

$\mathbf{e}$ の変換で，これに対応する座標変換は反変である。
このことを，座標の添字を上付けにすることで表している。

a_j^i の添字の上下については，つぎの「i が分子側，j が分母側」がこれの説明になる：

$$x^i = \sum_k a_k^i x'^k$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\sum_k a_k^i x'^k\right) = \sum_k a_k^i \frac{\partial x'^k}{\partial x'^j} = \sum_k a_k^i \delta_j^k$$
$$= a_j^i$$

基底 $\mathbf{e}$ に対し，

$$e^* = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1{}^* \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n{}^* \end{pmatrix}$$

は，V^* の基底になる。──これを，$\mathbf{e}$ の双対基底と呼ぶ。

双対基底について，つぎが成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1{}^* \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_n{}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ & \cdots & \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1{}^* \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n{}^* \end{pmatrix}$$

即ち，e の変換に対し，e^* は反変である。

e^* に対する座標──双対座標と呼ぶ──は，e^* の変換に対し反変である。したがって，e の変換に対しては，共変となる。

共変・反変の区別は，ゆるがせにできない。
量計算で数値を「分母の方におくか・分子のほうにおくか」と対応する内容だからである。
共変・反変の区別は，「共変・反変を区別できないと量計算はできない」というほどの内容なのである。

3.4.4　(2,1) テンソル

「速さ×時間＝距離」は，テンソル積「距離⊗時間*⊗ 時間」として，(2, 1) テンソルということになる。

前の「2」は，「反変は＜距離＞と＜時間＞の２つ」の「２」，
後ろの「1」は，「共変は＜時間*＞が１つ」の「1」。

計算式「速さ×時間」が「分子側は＜距離＞と＜時間＞の２つ，分母側は＜時間＞が１つ」であることを指す (2, 1) である。

3.5　単位つけ計算

3.5.1　単位を「メモる」と「つける」の区別

3.5.1 単位を「メモる」と「つける」の区別

量計算は，数計算になる。
これは，量計算は数計算に還元されるということである。

量計算である数計算は，これがどんな還元でこうなっているかをつねに理解して進める，というものになる。
実際，この理解を欠けば，計算を間違う。

> 学校数学では，生徒の量計算は形式感覚や公式の適用でやる計算が専らになっていく。
> 推論 (演繹) ではない。
> 「わからなければ形に慣れろ」というわけである。
> そこで，割るところを掛けるみたいなことが，ふつうに起こる。

単位を取ってしまうと間違うからといって，計算を単位付けで行おうとすれば，その計算はテンソル計算ということである。
四則計算は数の計算であるから，これに単位を含ませることはできない。
そこで，つぎがアイデアになる：

　《数に単位をメモる》

実際，実用場面――物理学や工学――でのテンソルは，単位をメモした数変項の計算式である。

体Ｋ上のｎ次元線型空間Ｖとその基底Ｅの場合として一般的に述べると，「数に単位をメモる」とはつぎをすることである：

　《Ｖの係数体Ｋの要素すべてに，添字の形で基底名「Ｅ」をメモる》

添字の付け方は，Ｅを構成しているベクトルに添字するときの位置と上下逆である。
（ルールは，「共変・反変」のことばで述べられる。）

このとき，例えば「５秒で２ｍの速さでは，３秒で何ｍ」の計算だとつぎのようになる：

$$
\begin{aligned}
&3^s \times {5_s}^{-1} \times 2^m \\
&= (3 \times 5^{-1}) \times 2^m \\
&= 1.2^m
\end{aligned}
$$

上付きのｓと下付のｓの縮約が，計算ということになるわけである。

小学算数では，逸脱として，単位をつけた計算――特に，単位の約分――が行われている。（実際，これが正しい計算法だとして，単位つき計算を指導する教員もいる。）
小学算数がなぜこれを逸脱にしているかというと，つぎが理由ということになる：

1. 本質的な考え方を，正規として教えるべし。
2. ここまで述べてきたテンソルの概念・論理は，小学算数レベルで教えられるものではない。

実際，テンソルの理論化は，嵩の多い計算を処さねばならない実務者――物理学や工学をやるひと――にとって必要になることである。

4　非テンソル

4.1　偽テンソルがあることを知る

4.1.1　数学のテンソルの前に ,「テンソル」の慣習がある

数学は，慣習の数学化である。
数学化は，これから漏れるものがある。

「テンソル」とは，ひとが「テンソル」と呼んでいるもののことである。
この意味で，「テンソル」は，慣習である。
数学のテンソルは，「テンソル」の慣習の数学化である。
この数学化は，これから漏れるものがある。

「テンソル」の数学化から漏れた「テンソル」を，「偽テンソル」と呼んでおく。

「偽テンソル」に，ネガティブな意味合いはない。
「数学のテンソルではない」を意味するだけである。

4.1.2　偽テンソルは，学習者の躓きのもと

学習は，論理 (理屈) をつないでいく作業である。
論理をつなげなくなることを，「躓く」と謂う。

躓きを過ごす方法は，つぎの３つである：

a. 論理の不整合を，修復する
b. 論理の不整合のもとを，捨てる
c. 論理の不整合を，飲み込む

学校の授業では，教師は生徒に「飲み込む」をさせる。
「飲み込める」は，要領がよいという能力であり，「頭がよい」といわれる生徒は，多くがこのタイプである。
飲み込めない生徒は，ここでドロップアウトすることになる。
問題は，「頭がわるい」がドロップアウトの理由にされることである。

論理体系の学習は，「要領がよい」はいつまでも続かない。
「頭がよい」生徒も，学習内容のレベルが上がるにつれ，だんだんとドロップアウトしていく。

「テンソル」の学習は，これを躓かせるものが山とある。
そして，「偽テンソル」の存在が，このうちの一つになる。

学習者は，「偽テンソル」をテンソルとして理解しようとする。
しかし「偽テンソル」であるから，テンソルとして理解することなどもとよりできないことである。
学習者は，ここで躓く。

彼らに対しては，つぎのことを言ってやる必要がある：

> *「躓きを自分の頭のせいにしてはならない。*
> *悪いのは，自分の頭ではない。*
> *悪いのは，偽テンソルをテンソルだとして示す授業者の方である。」*

4.2　行列 / 高次表形式を「テンソル」と呼ぶ慣習

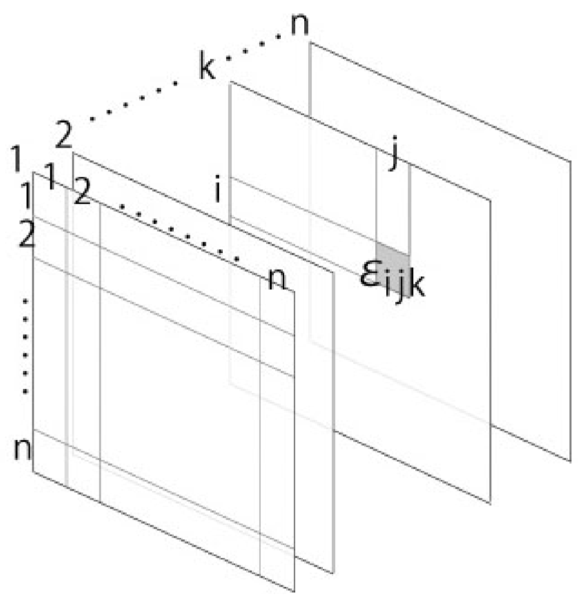
4.2.1 「ε テンソル」

偽テンソルには，「添字がついているから，テンソルだ」タイプのものがある。
「ε テンソル」は，それである。

ϵ_{ijk} が，つぎのように定義される：

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (\ (i,j,k) \text{ が偶順列}\ ) \\ -1 & (\ (i,j,k) \text{ が奇順列}\ ) \\ 0 & (\ i,j,k \text{ のうち等しいものがある}\ ) \end{cases}$$

「*添字がついているからテンソルだ*」の思いは，，
　　「*行列/超行列の形をしたものがテンソルだ*」
である。
「ϵ テンソル」の ϵ_{ijk} は，つぎの立方超行列の中に配置できる：



数学のテンソルは，「線型代数」の中の概念である。
ε は，そうではない。
「ε テンソル」は，偽テンソルである。

ε を「テンソル」に仕立てようとすれば，「集合」のカテゴリーでこれをやることになる。
この方法を示しておく。

簡単のために，$i,j,k \in \{1,2,3\}$ の場合で説明する。

集合 $\{1,2,3\}$ を N , とおく。
そして，写像

$$\epsilon : N \times N \times N \longrightarrow \{+1,-1,0\}$$

をつぎのように定義する：

$$\epsilon(i\,j\,k) = \begin{cases} +1 & (\ (i,j,k) \text{ が偶順列}\ ) \\ -1 & (\ (i,j,k) \text{ が奇順列}\ ) \\ 0 & (\ i,j,k \text{ のうち等しいものがある}\ ) \end{cases}$$

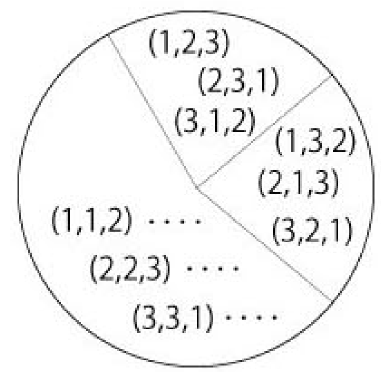
$N \times N \times N$ 上の同値関係

$$(i,j,k) \sim (i',j',k')$$

を

$$\epsilon(i,j,k) = \epsilon(i',j',k')$$

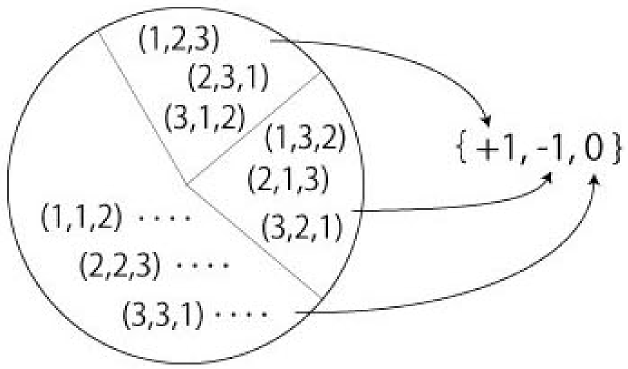
で定義し，この同値関係で $N \times N \times N$ を類別した商集合を，$N \otimes N \otimes N$ で表す。 ――テンソル記号「$\otimes$」のこの使用は，もちろん無理矢理である。



そしてこのとき，つぎの可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd} N \times N \times N \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & \{+1,-1,0\} \\ N \otimes N \otimes N \arrow[ur, dashed, "\overline{\varepsilon}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\epsilon}$ は，１対1対応であり，「集合」のカテゴリーでの「同型 isomorphism」である。



4.2.2「計量テンソル」

「テンソル」のついた標題で最も目立つものの一つに，「計量テンソル」がある。
「テンソル」の意味がわからずモヤモヤしている学習者には，「*計量テンソルがわかればテンソルがわかりますよ*」の誘いのように見えてくる。

ところがこの「計量テンソル」こそ，テンソルから最も遠いものの一つである。
したがって，テンソルの学習にとっては，最も始末の悪いものの一つとなる。
「テンソル」のテクストに「計量テンソル」載せるときは「*これは偽テンソルだ*」と断ってくれたらよいのだが，テクストの書き手にも「偽テンソル」の意識が無いので，どうしようもない。

「テンソル」の意味は，「線型空間のテンソル積に表現されるもの」である。
テンソル積は，線型空間の「因数分解」みたいなもので，つぎがこれの文脈である：

「線型空間 W は，線型空間 $V_1, \cdots, V_n$ のテンソル積と同型：
$$W \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$ 」

「計量テンソル」は，このような構造とは無縁である。
では，なぜ「テンソル」と呼ばれるのか。
行列形式に表現されるからである。

行列形式を「テンソル」と呼ぶ慣習がある。
この慣習は，数学による「テンソル」の定式化からは，はみ出るものになる。

昔の「行列」のテクストには，堂々と「*行列とは表のことである*」と書くものがあった。「行列」が線型変換の表現として意味づけられるようになるのは，結構近年のこととなる。
そして，「テンソル」のいまの状況は昔の「行列」と同じ，というわけである。

ベクトル

$$\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n)$$

の大きさを，つぎのように定義する：

$$|\mathbf{x}|^2 = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$$

そしてこれに「内積」の形式を見る：

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x}|^2 &= (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 \\
&= (x^1, \cdots, x^n) \cdot (x^1, \cdots, x^n) \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

そこで，$\mathbf{x}$ のもともとの表現──基底の線型結合──に戻って，内積をやる：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= (x^1\, \mathbf{e}_1 + \cdots + x^n\, \mathbf{e}_n) \cdot (x^1\, \mathbf{e}_1 + \cdots + x^n\, \mathbf{e}_n) \\
&= \sum_{i,j} (x^i\, x^j)\, (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)
\end{aligned}
$$

ここに

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

とおいて，

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j} g_{ij}\, x^i\, x^j$$

これは，《g_{ij} の値の設定をいろいろ変えることで，いろいろな計量をつくれる》を示唆する。
こうして，「計量の核心は g_{ij} だ」となる。

g_{ij} は，添字が二つなので，「行列」の形に書ける：

$$
\begin{pmatrix}
g_{11} & \cdots & g_{1n} \\
 & \cdots & \\
g_{n1} & \cdots & g_{nn}
\end{pmatrix}
$$

そして，「計量」がつぎの形に書ける：

$$
|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i,j} g_{ij} x^i\, x^j = {}^t\!\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
g_{11} & \cdots & g_{1n} \\
 & \cdots & \\
g_{n1} & \cdots & g_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}
$$

そこで，行列形式を「テンソル」と呼ぶ慣習に則り，g_{ij} を「テンソル」と呼ぶ。

4.2.3　知識表現手法「テンソル」(人工知能)

行列ないし高次表形式を「テンソル」と呼ぶ慣習──これが最も素朴に現れている例に，人工知能の知識表現手法「テンソル」がある。

類概念 (カテゴリー) を，集合に表す。
二つの集合

$$
\begin{aligned}
A &= \{a_1, \cdots, a_m\} \\
B &= \{b_1, \cdots, b_n\}
\end{aligned}
$$

に対し，$a_i \in A$ と $b_j \in B$ の関係の強さを，r_{ij} で表す。
そして，行列

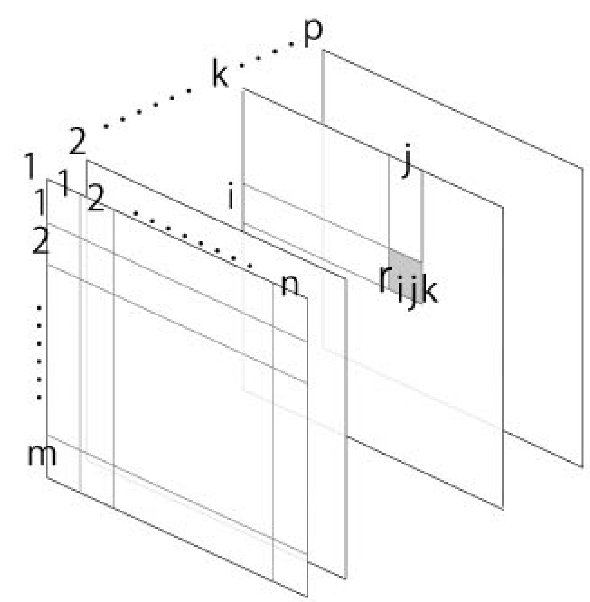
$$
\begin{pmatrix}
r_{11} & \cdots & r_{1n} \\
 & \cdots & \\
r_{m1} & \cdots & r_{mn}
\end{pmatrix}
$$

を，AとBの関係概念とする。

この関係概念は２次元であるが，つぎに次元を増やしていく。
即ち，新たな類概念を集合

$$C = \{c_1, \cdots, c_p\}$$

として導入し，「$c_k \in C$ における $a_i \in A$ と $b_j \in B$ の関係」という考え方をする。
この関係は，$r_{(ij),k}$ の表現になり，結局 r_{ijk} の表現になる。
そしてこれは，３次元の表をつくったことになる：



このやり方を繰り返すことで，高次元の関係概念をつくっていくことができる。
そして，この関係概念の表現は，高次元表である。
人工知能研究では，この形式を「テンソル」と呼んでいる。

「次元を増やす」の意味は，「概念を複雑にする」である。
人にとってふつうである概念は，分析するとひじょうに複雑なものになる。
人工知能研究は，この複雑のシミュレーションを課題にする。
そして，アプローチの一つが，「概念を＜高次元表＞に表現」——「テンソル」
——というわけである。

4.3　冪乗式

4.3.1　逆二乗法則

4.3.1　逆二乗法則

数学の「テンソル」の意味は，「線型空間のテンソル積に表現されるもの」である。
「テンソル」のこの定式化は，融通の利かない面がある。

「テンソル」の思いのうちには，《物理法則をテンソルに還元する》というのがある。
ところが，「テンソル」の意味が「線型空間のテンソル積に表現されるもの」だと，物理法則の代表的なものがテンソルではなくなってしまう。
端的に，冪乗を含む式──冪乗則──は，テンソルになってくれない。
特に，逆二乗法則の類は，テンソルではない。

そこで，《逆二乗法則の本質を変えないで，これの冪乗を無くしてテンソルにする》ということを考える。

万有引力の公式を例にする：

$$F = G\frac{M\,m}{r^2}$$

ここで，M, m には質量 (重さ) の値，r には距離の値，F には力の値が，それぞれ入る。
G は，質量・距離・力の各単位を固定することで決まる定数。

この式に対し，

$$G\frac{M\,m}{r^2} = -G\frac{d}{dr}\left(\frac{M\,m}{r}\right)$$

の関係を見て，式

$$-G\frac{M\,m}{r}$$

の意味づけを考える。
これは，「万有引力の位置エネルギー」というものになる。
そしてこれだと，テンソルになる：

$$\text{質量} \otimes \text{質量} \otimes \text{距離}^*$$

5　テンソル積の基底・座標

5.1　大学理数のテンソルは 高校以前のものとどう違う

5.1.1「数値」から「行列」へ

高校までの「計算公式」で「テンソル」にあたるものは，量計算の公式である。
量は，線型空間としては，１次元である。
大学理数科で授業する「テンソル」は，線型空間が一般次元になる。

１次元が一般次元になることは，どんなふうになることか。
「数値」が「行列」になる。
以下，これの説明。

線型空間がｎ次元であるとは，基底を構成する元がｎ個── $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ ──ということ。
量の場合は，１個ということになり，この１個が「単位」にあたるわけである。

量の場合の
　　《元を「単位の ξ 倍」に展開し，
　　　「測定値 ξ 」で表現する》
は，線型空間では，
　　《元を「基底の線型結合 $x^1\ \mathbf{e}_1 + \cdots + x^n\ \mathbf{e}_n$」に展開し，
　　　「座標 $(x^1, \cdots, x^n)$」で表現する》
になる。

また，量の場合の
　　《測定値 ξ に対する，η 倍》
は，線型空間では，
　　《座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ に対する，線型変換行列 (a^i_j) の作用》
になる。

量計算の公式が数値計算の公式であるのは，量が１次元の線型空間だからである。
一般次元になると，数値は行列に変わる。
数値の掛け算は行列の掛け算に変わり，数値の割り算は転置行列を掛けことに変わる。

5.1.2　超マトリクス

線型写像/変換は，行列に表現される。
しかし，テンソルの線型写像/変換は，行列の２次元配列を３次元以上に拡張した超行列が，自然な表現になる。

例えば，つぎの形の線型写像の表現行列 (平方構成) は，立方構成に書く方が無理がない：

$$f : U \otimes V \longrightarrow W$$

以下，これの説明。

U, V, W の基底を，それぞれ

$$\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$$
$$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$
$$\{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_p\}$$

とする。
このとき，$U \otimes V$ の基底は，

$$\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j \mid i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n\}$$

$\mathbf{x} \in U \otimes V$ の $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ 成分を，x^{ij} で表す。

f の表現行列 A は，つぎのようになっている：

1. $(m \times n)$ 個の $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ を，１列に並べる。
2. この配列に対する $\mathbf{x} \in U \otimes V$ の座標を，$(x^1, \cdots, x^{m\times n})$ とする。
3. A の k 行が $(a^k_1, \cdots, a^k_{m\times n})$ であるとは，$f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{w}_k$ 成分が

$$a^k_1 x^1 + \cdots + a^k_{m\times n} x^{m\times n}$$

　になるということ。

ここで，「１列に並べる」を「行列に並べる」に変える：

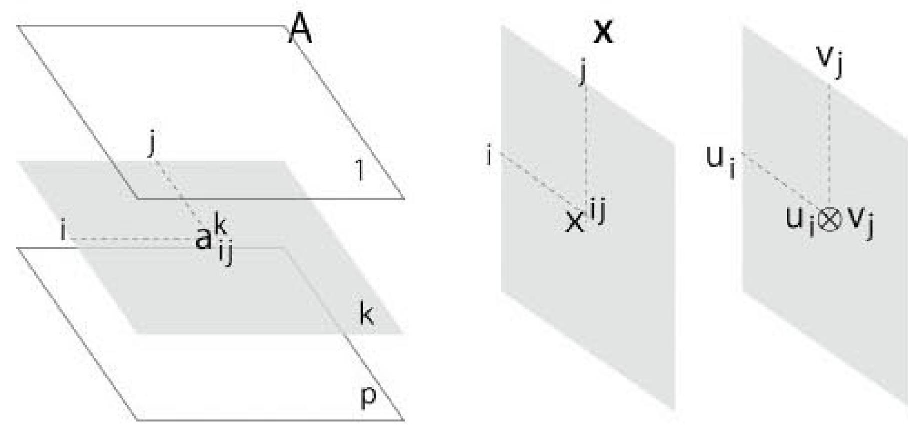
1. $(m \times n)$ 個の $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ を，つぎのように配列する：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_n \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{x}$ の座標を，つぎのように配列する：

$$\begin{pmatrix} x^{11} & \cdots & x^{1n} \\ & \cdots & \\ x^{n1} & \cdots & x^{nn} \end{pmatrix}$$

3. A の k 行の項を，つぎのように行列の形に配列する：
　a^k_t と積をなすのが x^{ij} であるとき：
　a^k_t を，a^k_{ij} として，行列の (i, j) の場所の置く



5.2　テンソル積の座標

5.2.1　テンソル積の基底

線型空間 $U,\ V$ のテンソル積 $U \otimes V$ を考える。

$U,\ V$ の基底

$$\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$$
$$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

に対するつぎの集合は，$U \otimes V$ の基底になる：

$$\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j \mid i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n\}$$

以下，これの証明：

(1) $U \otimes V$ の元が，$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ の線型結合で書けること：

$U \otimes V$ の元は，$(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \in U \times V$ に対する $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ であり，

$$\mathbf{x} = \sum_i x^i\, \mathbf{u}_i$$
$$\mathbf{y} = \sum_j y^j\, \mathbf{v}_j$$

とするとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= \left(\sum_i x^i\, \mathbf{u}_i\right) \otimes \left(\sum_j y^j\, \mathbf{v}_j\right)\\ &= \sum_{i,j} (x^i y^j)\,(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j)\end{aligned}$$

(2) $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ が線型独立であること：

先ず，テンソル積の定義から，

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x}' \otimes \mathbf{y}' \implies (\ \xi\, \mathbf{x} = \mathbf{x}' \implies \xi\, \mathbf{y}' = \mathbf{y}\ )$$

よって，

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}_j = \mathbf{x}' \otimes \mathbf{v}_j \implies \mathbf{x} = \mathbf{x}'$$

特に，

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \otimes \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \otimes \mathbf{v}_j \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

これより，

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \mathbf{x}_j \otimes \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \\
&\Longrightarrow\ \mathbf{x}_p \otimes \mathbf{v}_p = \sum_{j \neq p} \mathbf{x}_j \otimes \mathbf{v}_j \\
&\Longrightarrow\ \mathbf{x}_p \otimes \mathbf{v}_p = 0 \\
&\Longrightarrow\ \mathbf{x}_p = 0
\end{aligned}
$$

最後に，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \xi^{ij} (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) = \mathbf{0} \\
&\Longrightarrow\ \sum_j \left(\sum_i \xi^{ij} \mathbf{u}_i \right) \otimes \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \\
&\Longrightarrow\ \sum_i \xi^{ij} \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad (j = 1, \cdots, n) \\
&\Longrightarrow\ \left(\xi^{ij} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \right) \quad (j = 1, \cdots, n) \\
&\Longrightarrow\ \xi^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

5.2.2　テンソル積の座標

いま，つぎのように設定する：

$$
\begin{array}{ll}
U & : \text{体 } K \text{ 上の } m \text{ 次元線型空間} \\
V & : \text{体 } K \text{ 上の } n \text{ 次元線型空間} \\
\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\} & : U \text{ の基底} \\
\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\} & : V \text{ の基底}
\end{array}
$$

このとき，

$$
\{\ \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j \mid i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n\ \}
$$

が，$U \otimes V$ の基底になる。

線型空間では基底を行ベクトルの形に配置したが，テンソル積 $U \otimes V$ ではつぎのように行列の形に配置する：

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_n \\
 & \cdots & \\
\mathbf{u}_m \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{v}_n
\end{pmatrix}
$$

したがって，３つの線型空間のテンソル積だと，立方の形に構成することになる。そして４つ以上になると，この表現は無理となる。

基底 $\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j\}$ に対する座標 (ξ^{ij}) も，基底の行列配置に対応させて，つぎのように行列の形に配置する：

$$
\begin{pmatrix}
\xi^{11} & \cdots & \xi^{1n} \\
 & \cdots & \\
\xi^{m1} & \cdots & \xi^{mn}
\end{pmatrix}
$$

いま

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{x} \in U & : \text{基底 } \{\mathbf{u}_i\} \text{ に対する座標が } (x^1, \cdots, x^m) \\
\mathbf{y} \in V & : \text{基底 } \{\mathbf{v}_j\} \text{ に対する座標が } (y^1, \cdots, y^n)
\end{array}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= (x^1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x^n \mathbf{u}_m) \otimes (y^1 \mathbf{v}_1 + \cdots + y^m \mathbf{v}_n) \\
&= \sum_{i,j} (x^i \mathbf{u}_i) \otimes (y^j \mathbf{v}_j)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i,j} (x^i y^j)(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j)$$

即ち，$(x^i y^j)$ が 基底 $\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j\}$ に対する $x \otimes y$ の座標になる。

$$\begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix}$$

5.2.3　テンソル積の線型写像の表現超行列

線型空間 U, V のテンソル積 $U \otimes V$ を考える。

U, V の基底

$$\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$$
$$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

に対するつぎの集合は，$U \otimes V$ の基底になる：

$$\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j \mid i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n\}$$

$U \otimes V$ から線型空間 W への線型写像

$$f : U \otimes V \longrightarrow W$$

の表現行列 A は，つぎのようになっている：

1. $(m \times n)$ 個の $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ を，1列に並べる。
2. この配列に対する $\mathbf{x} \in U \otimes V$ の座標を，$(x^1, \cdots, x^{m \times n})$ とする。
3. A の k 行が $(a^k_1, \cdots, a^k_{m \times n})$ であるとは，$f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{w}_k$ 成分が

   $$a^k_1 x^1 + \cdots + a^k_{m \times n} x^{m \times n}$$

   になるということ。

ここで，「1列に並べる」を「行列に並べる」に変える：

1. $(m \times n)$ 個の $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ を，つぎのように配列する：

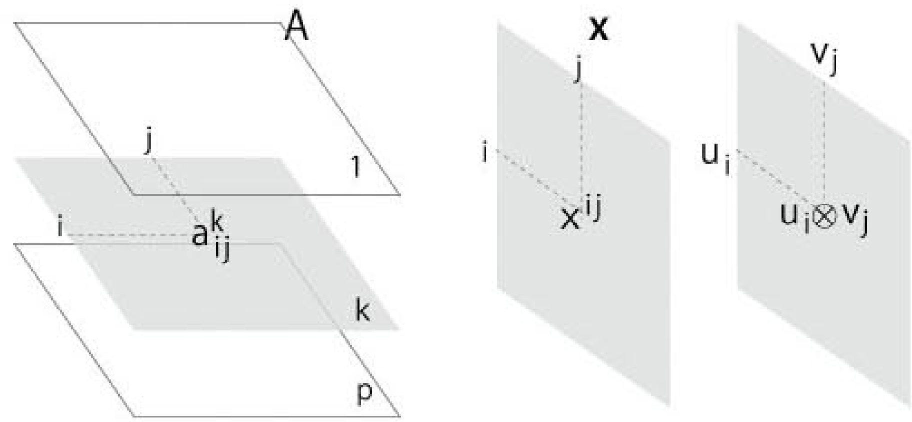
   $$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_n \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{x}$ の座標を，基底の配列と対応させてつぎのように配列する：

   $$\begin{pmatrix} x^{11} & \cdots & x^{1n} \\ & \cdots & \\ x^{m1} & \cdots & x^{mn} \end{pmatrix}$$

3. A の k 行の項を，つぎのように行列の形に配列する：

   a^k_ι と積をなすのが x^{ij} であるとき：
   a^k_ι を，a^k_{ij} として，行列の (i, j) の場所の置く



こうして，f は，立方配列の形に表現されることになる。
いまは２つの線型空間のテンソル積であるが，これが３つ以上になると，この表現――「超行列」と呼んでおく――は無理となる。

5.3　テンソル積の座標変換

5.3.1　基底変換の式

テンソル積の座標は，基底に対して決まる。
言い換えると，基底変換には座標変換が応じる。
以下，テンソル積の基底変換について。

簡単のため，２つの線型空間のテンソル積で考える。

線型空間

U ： 体 K 上 m 次元
V ： 体 K 上 n 次元

のテンソル積 $U \otimes V$ の基底は，U, V それぞれの基底

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$$
$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

に対する

$$\{\ \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j \mid i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n\ \}$$

である。

そこで $U \otimes V$ における基底変換は，U, V の基底

$$\mathbf{u}' = \{\mathbf{u}'_1, \cdots, \mathbf{u}'_m\}$$
$$\mathbf{v}' = \{\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n\}$$

が加わったときの，基底 $\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j\}$ から基底

$$\{\mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{v}'_j\}$$

への変換である。

つぎのように描く：

$$(\mathbf{u}'_1, \cdots, \mathbf{u}'_m) = (\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m)\, A$$
$$(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m) = (\mathbf{u}'_1, \cdots, \mathbf{u}'_m)\, B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ & \cdots & \\ a_1^m & \cdots & a_m^m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_m^1 \\ & \cdots & \\ b_1^m & \cdots & b_m^m \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n) = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)\, C$$
$$(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n)\, D$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \\ & \cdots & \\ c_1^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_n^1 \\ & \cdots & \\ d_1^n & \cdots & d_n^n \end{pmatrix}$$

このとき，

$$B = A^{-1}$$
$$D = C^{-1}$$

基底の変換式を求める：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{v}'_j &= \left(\sum_k a_i^k \mathbf{u}_k \right) \otimes \left(\sum_k c_j^k \mathbf{v}_k \right) \\ &= \sum_{k,l} \left(a_i^k \mathbf{u}_k \right) \otimes \left(c_j^l \mathbf{v}_l \right) \\ &= \sum_{k,l} \left(a_i^k c_j^l \right) (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{v}_l) \\ &= \sum_k a_i^k \left(\sum_l c_j^l (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{v}_l) \right) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ & \cdots & \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_l c_1^l \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_l & \cdots & \sum_l c_m^l \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_l \\ & \cdots & \\ \sum_l c_1^l \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_l & \cdots & \sum_l c_m^l \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ & \cdots & \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_m^1 \\ & \cdots & \\ c_1^m & \cdots & c_m^m \end{pmatrix} \\ &= {}^t\!A \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_m \end{pmatrix} C \end{aligned}$$

そしてこれより，

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_m \end{pmatrix}
= {}^t(AB) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_m \end{pmatrix} (CD)
$$

$$
= {}^tB \left({}^tA \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_m \end{pmatrix} C \right) D
= {}^tB \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_m \end{pmatrix} D
$$

5.3.2　座標変換の式

線型空間

U ： 体 K 上 m 次元
V ： 体 K 上 n 次元

のテンソル積 $U \otimes V$ の基底変換

$$
\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j\} \to \{\mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{v}'_j\}
$$

$$
\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}, \qquad \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}
$$

$$
\mathbf{u}' = \{\mathbf{u}'_1, \cdots, \mathbf{u}'_m\}, \qquad \mathbf{v}' = \{\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n\}
$$

が，つぎのように得られた：

$$
(\mathbf{u}'_1, \cdots, \mathbf{u}'_m) = (\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m)\, A
$$

$$
(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m) = (\mathbf{u}'_1, \cdots, \mathbf{u}'_m)\, B
$$

$$
A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ & \cdots & \\ a_1^m & \cdots & a_m^m \end{pmatrix} \qquad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_m^1 \\ & \cdots & \\ b_1^m & \cdots & b_m^m \end{pmatrix}
$$

$$
(\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n) = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)\, C
$$

$$
(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n)\, D
$$

$$
C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \\ & \cdots & \\ c_1^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix} \qquad D = C^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_n^1 \\ & \cdots & \\ d_1^n & \cdots & d_n^n \end{pmatrix}
$$

のとき，

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_m \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_m \end{pmatrix} C
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{v}_m \end{pmatrix} = {}^tB \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_1 \otimes \mathbf{v}'_m \\ & \cdots & \\ \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{v}'_m \end{pmatrix} D
$$

続いて，この基底変換に応じる座標変換の式を求める。

つぎのように設定する：

$\mathbf{x} \in U$

　基底 $\{\mathbf{u}_i\}$ に対する座標が $(x^1, \cdots, x^m)$

　基底 $\{\mathbf{u}'_i\}$ に対する座標が $(x'^1, \cdots, x'^m)$

$\mathbf{y} \in V$

　基底 $\{\mathbf{v}_i\}$ に対する座標が $(y^1, \cdots, y^n)$

　基底 $\{\mathbf{v}'_i\}$ に対する座標が $(y'^1, \cdots, y'^n)$

このとき，

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \sum_{i,j} (x^i y^j)(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) = \sum_{i,j} (x'^i y'^j)(\mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{v}'_j)$$

そして，

$$^t(x'^1, \cdots, x'^m) = B\, ^t(x^1, \cdots, x^m)$$
$$^t(y'^1, \cdots, y'^n) = D\, ^t(y^1, \cdots, y^n)$$

$$\begin{aligned}
x'^i y'^j &= \left(\sum_k b^i_k x^k\right)\left(\sum_k d^j_k y^k\right) \\
&= \sum_{k,l} \left(b^i_k x^k\right)\left(d^j_l y^l\right) \\
&= \sum_{k,l} \left(b^i_k d^j_l\right)\left(x^k y^l\right) \\
&= \sum_k b^i_k \left(\sum_l d^j_l (x^k y^l)\right)
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x'^1 y'^1 & \cdots & x'^1 y'^n \\ & \cdots & \\ x'^m y'^1 & \cdots & x'^m y'^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_m \\ & \cdots & \\ b^m_1 & \cdots & b^m_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_l d^1_l x^1 y^l & \cdots & \sum_l d^n_l x^1 y^l \\ & \cdots & \\ \sum_l d^1_l x^m y^l & \cdots & \sum_l d^n_l x^m y^l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_m \\ & \cdots & \\ b^m_1 & \cdots & b^m_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^1_1 & \cdots & d^n_1 \\ & \cdots & \\ d^1_n & \cdots & d^n_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= B \begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix} {}^tD$$

また，これより

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix} \\
&= AB \begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix} {}^t(CD) \\
&= A \left(B \begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix} {}^tD \right) {}^tC \\
&= A \begin{pmatrix} x'^1 y'^1 & \cdots & x'^1 y'^m \\ & \cdots & \\ x'^n y'^1 & \cdots & x'^n y'^m \end{pmatrix} {}^tC
\end{aligned}$$

まとめ：

$$\begin{pmatrix} x'^1 y'^1 & \cdots & x'^1 y'^n \\ & \cdots & \\ x'^m y'^1 & \cdots & x'^m y'^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix} {}^tD$$

$$\begin{pmatrix} x^1 y^1 & \cdots & x^1 y^n \\ & \cdots & \\ x^m y^1 & \cdots & x^m y^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'^1 y'^1 & \cdots & x'^1 y'^m \\ & \cdots & \\ x'^n y'^1 & \cdots & x'^n y'^m \end{pmatrix} {}^tC$$

おわりに

『「テンソル」とは何か』は，以上である。この内容で，読者は「テンソル」の意味をわかったことになる。

このテクストをつくったのは，「テンソル」の意味を論じ得ている学習テクストが存在しないためである。
「テンソル」の意味は，数学の「テンソル積」に基づいて説明される。
「テンソル」の学習テクストは，数学の「テンソル積」に基づかない。
よって，「テンソル」の意味を論じ得ないのは，当然である。
「テンソル」の意味を論じ得る構造に，端からなっていないのである。

数理の勉強の勝手がまだよくわからない読者に，アドバイスする。
勉強の要諦は，あれやこれや論に振り回されないことである。
そして，一般論に埋没しないことである。

数理の主題は，形式・構造である。
形式・構造の出自は，つねに＜卑近＞である。
形式・構造がわかったとなるのは，その形式・構造を以て＜卑近＞を説明できるとなったときである。
これの逆をいく体が，一般論への埋没である。
それは，アブストラクト・ナンセンスへの埋没に他ならない。

「テンソル」がわかったとなるのは，「テンソル」の概念を以て《量の公式の適用》を説明できるとなったときである。
「テンソル」の意味の理解ということでは，それ以上求めることはない。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/me/subjects/linear_algebra/tensor/

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て北海道教育大学教育学部教授 (数学教育専門)，2015 年退職。

「テンソル」とは何か

2018-03-01　アップロード (サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp