

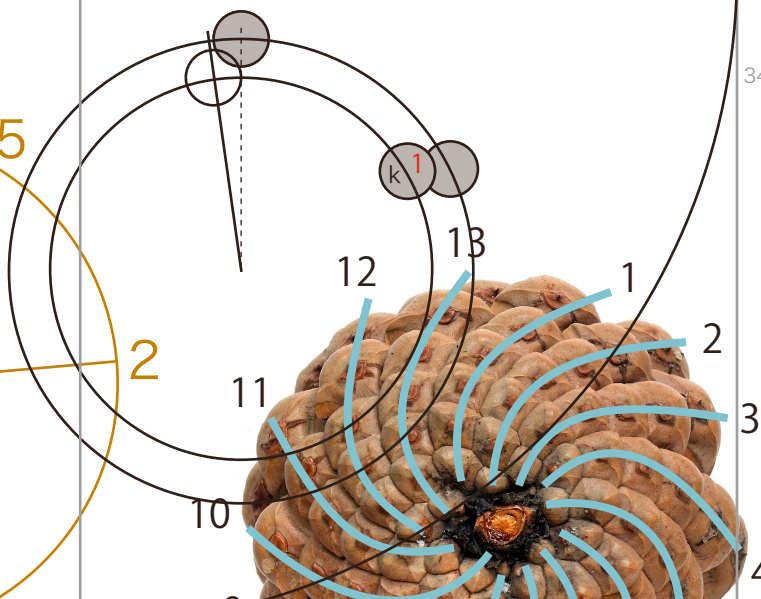
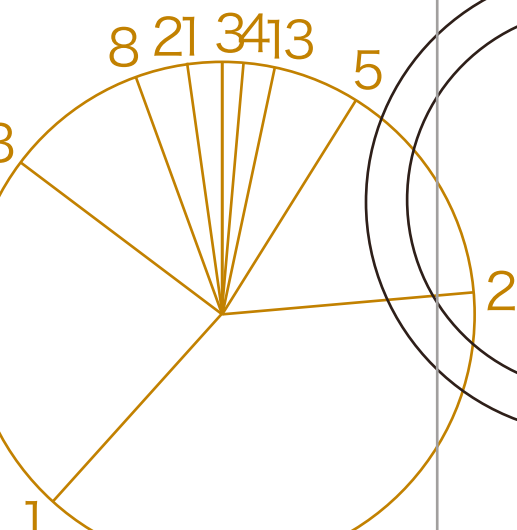
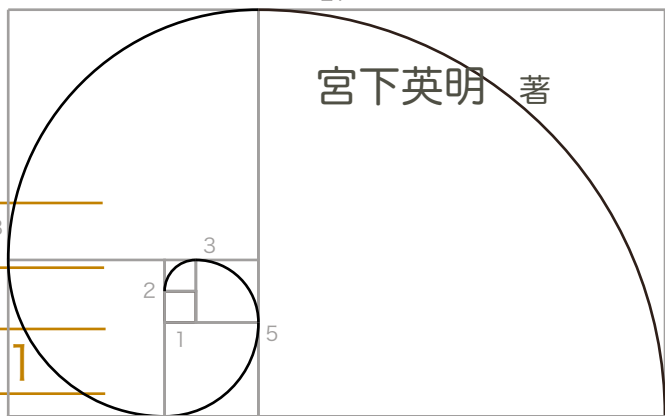
フィボナッチ数・ 黄金比・黄金角

Ver. 2014-07-26

21

宮下英明 著

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$



フィボナッチ数・ 黄金比・黄金角

本書について

本書は、

<http://m-ac.jp/>

のサイトで書き下ろしている『フィボナッチ数・黄金比・黄金角』を
PDF 文書の形に改めたものです。

文中の青色文字列は、ウェブページへのリンクであることを示しています。

目次

はじめに	1
1 黄金比	5
1.1 黄金比の定義	6
1.2 黄金比の意味	7
1.3 フラクタル性 (自己相似形の生成)	9
1.4 黄金比の導出——正五角形から	11
2 フィボナッチ数列	21
2.1 フィボナッチ数列の意味 (出自)	22
2.2 フィボナッチ数列の定義	25
3 黄金角	33
3.1 黄金角の定義	34
3.2 フィボナッチ数との関係	36
3.3 フラクタル性 (自己相似形の生成)	38
3.4 黄金角跳び回転	41
3.5 渦巻きとフィボナッチ数	47
付録：ユークリッドの互除法	53
A1 ユークリッドの互除法	54
A2 例： $\sqrt{2}$ の 連分数表現	57
おわりに	63

はじめに

黄金比は、「不思議な数」でも何でもなく、古代ギリシアの数学においてはアタリマエの主題として出てきたに相違ない。

実際、古代ギリシアの数学は、「整数比」を中心的な主題の一つにするものであって、整数比を求めるアルゴリズムの「ユークリッドの互除法」をつくっていた。そしてこのユークリッドの互除法で「無理数」をつくるときは、つぎの連分数で表される数が、「いの一番」のものになる：

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

そして、これが「黄金比」である。

本テキストは、「黄金比」を「最もシンプルな無限互除を現す数」のストーリーで解説しようとするものである。

このとき、黄金比の連分数を数列に表現し直して、各項を計算すれば、「フィボナッチ数」が現れてくる。

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3+5}{5} = \frac{8}{5}$$

.....

「フィボナッチ数」は、「イタリアの数学者フィボナッチの名にちなんで」となっているが、「黄金比」を本質的に構成するものであって、「黄金比」を主題化した古代ギリシア数学者の押さえるところとならなかったはずはない。

ところで、「黄金比」は、生物の形態形成学の方で、主題になる。そしてこのときは、「フィボナッチ数——黄金角」が主題の趣きになる。即ち、生物の形態形成にフィボナッチ数が見出されることに對し、これの理を形態形成学的に明らかにしようとして、「フィボナッチ数——黄金角」の論に進む。

わたしは生物形態形成学の方はまったくの素人だが、その中から聞こえてくる「フィボナッチ数——黄金角」の論には興味が引かれる。実際、本テキストは、この興味が作成のもとになった。——特に、「[全ての植物をフィボナッチの呪いから救い出す](#)」（[近藤滋](#)）に触発されたものである。

1 黄金比

1.1 黄金比の定義

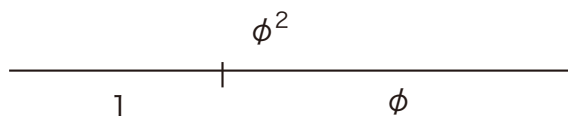
1.2 黄金比の意味

1.3 フラクタル性 (自己相似形の生成)

1.4 黄金比の導出——正五角形から

1.1 黄金比の定義

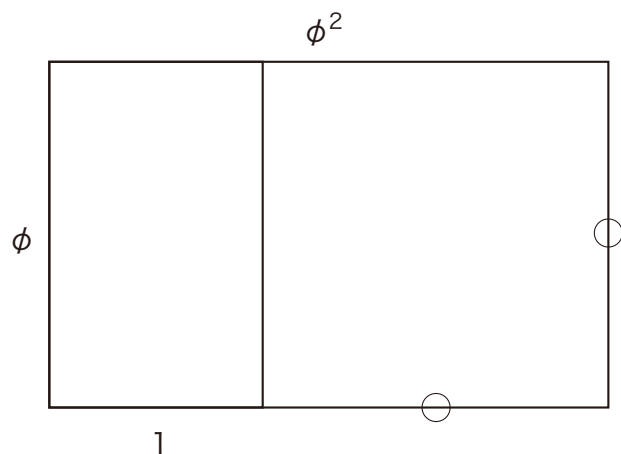
線分をつぎのように内分する比 ϕ が、「黄金比」の名で定義される：



この $1 + \phi = \phi^2$ を満たす ϕ の値は：

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.62 \dots$$

ϕ は、つぎの図によっても表現される：



後の図は、黄金比の「フラクタル性（自己相似形の生成）」 (§1.3) の表現に、適している。

また、「フィボナッチ数列の意味（出自）」 (§1.2) の主題における「黄金比とフィボナッチ数列の関係」を見るのにも、適している。

1.2 黄金比の意味

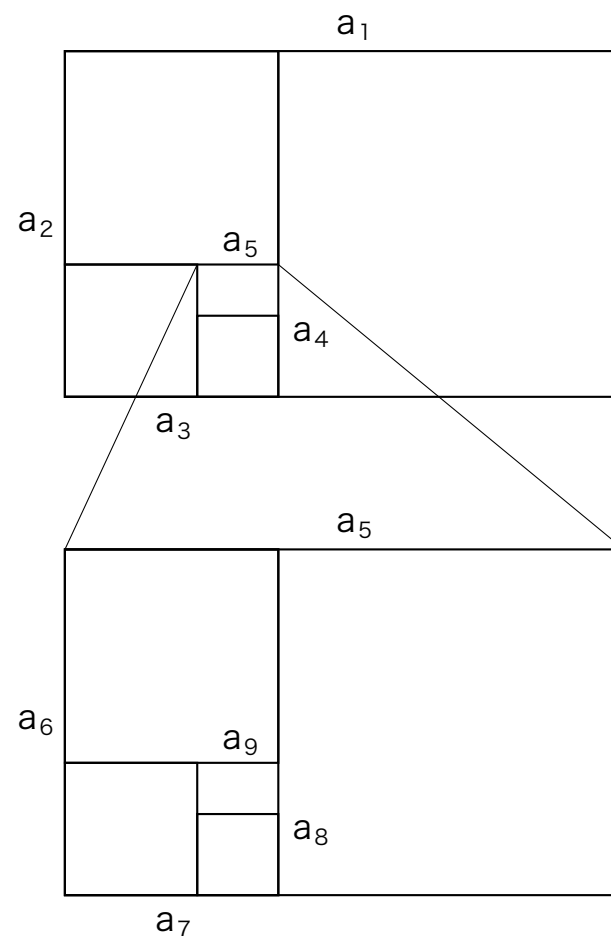
定義と意味は、別である。

定義は、操作性重視でその表現が決められる。

翻って、操作性重視の表現のために、意味が見えなくなる。

黄金比の2線分 a_1, a_2 に、ユークリッド互除法を施す。

これは、「相手に1つ入って余りが出る」を繰り返すものになる：



$$\frac{a_1}{a_2} = 1 + \frac{a_3}{a_2} = 1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}$$

$$\left(\text{同様に } \frac{a_2}{a_3} = 1 + \frac{1}{\frac{a_3}{a_4}} \text{ となって} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a_3}{a_4}}}$$

(この調子で続けていって)

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

翻って、つぎが「黄金比」の意味になる：

「ユークリッド互除法による連分数表現が、
 <延々と続く連分数>になり、かつ
 <延々と続く連分数>のうち(註)で形が最もシンプル」

註：例えば、つぎの連分数は、 $1 + \sqrt{2}$ である (§A2)：

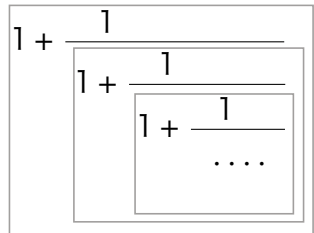
$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

1.3 フラクタル性 (自己相似形の生成)

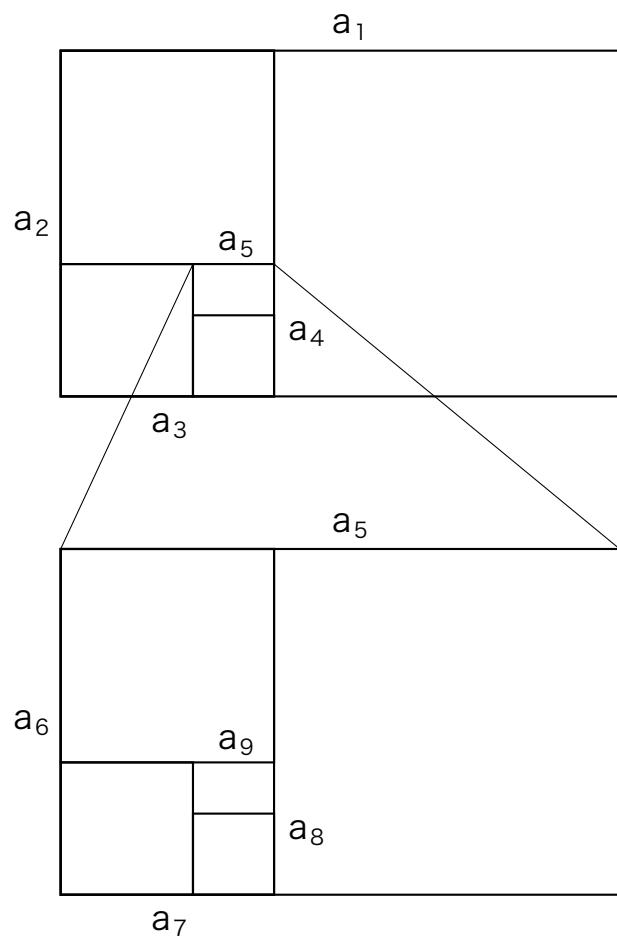
黄金比 ϕ は、つぎの連分数である：

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

この連分数は、フラクタル構造 (自己相似形の生成) になっている：

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$


このフラクタル構造は、図に表現すれば、つぎのようになる：



生物の形態形成で「黄金比」が取り上げられることがあるが、そこでは「形態形成のフラクタル性」が主題になっている。

1.4 黄金比の導出——正五角形から

「正方形の、辺と対角線の長さの比は？」

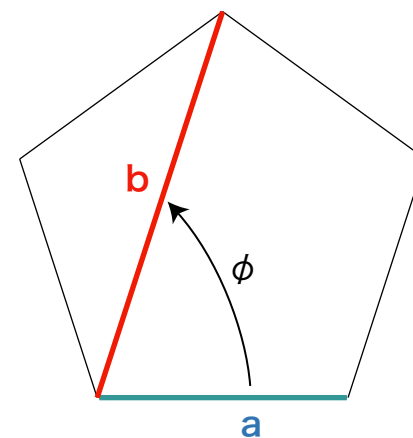
この問いから、 $\sqrt{2}$ が導かれてくる。

「正五角形の、辺と対角線の長さの比は？」

この問いから導かれてくるのが、黄金比 $\phi (= (1 + \sqrt{5})/2)$ である。

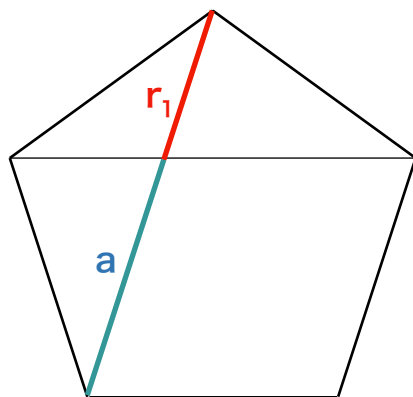
(1) 黄金比の導出

黄金比は、正五角形からつぎの長さの比として導出される：

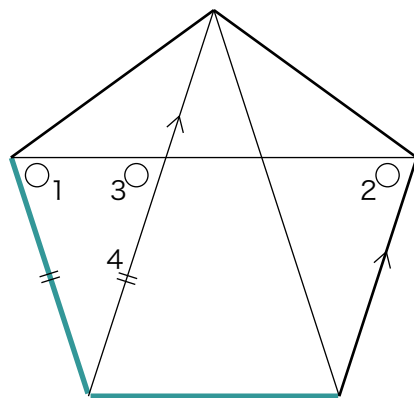


導出方法は、ユークリッド互除法である。

先ず, a は, つぎのように b の中に1回入って, r_1 余る :

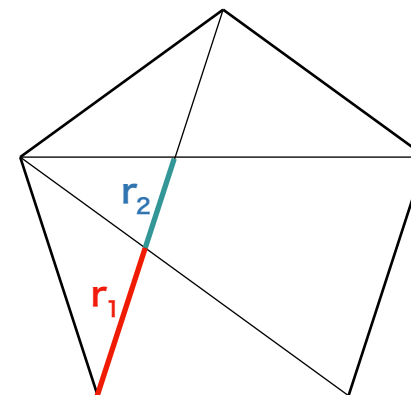


実際, 図中の長さ a が, つぎのように導かれる :

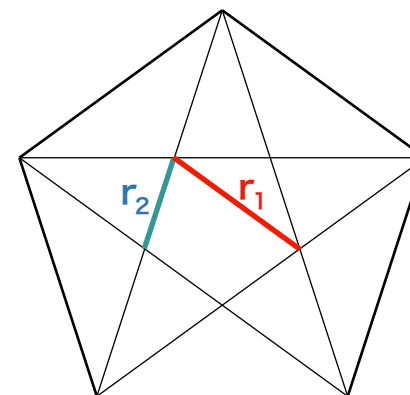


(番号は, 推論の順序)

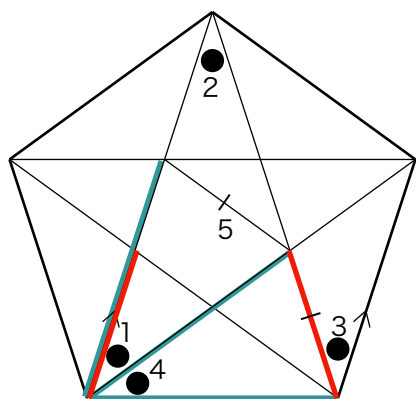
r_1 は, つぎのように a の中に1回入って, r_2 余る :



r_1 は, つぎのようにとれる :



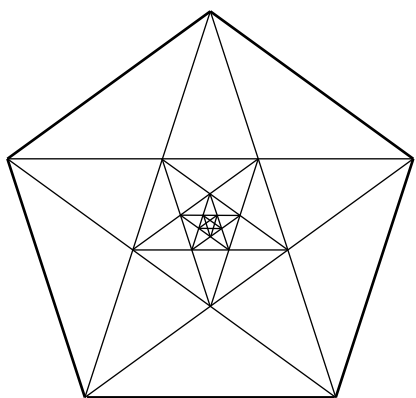
実際, 図中の長さ r_1 が, つぎのように導かれる :



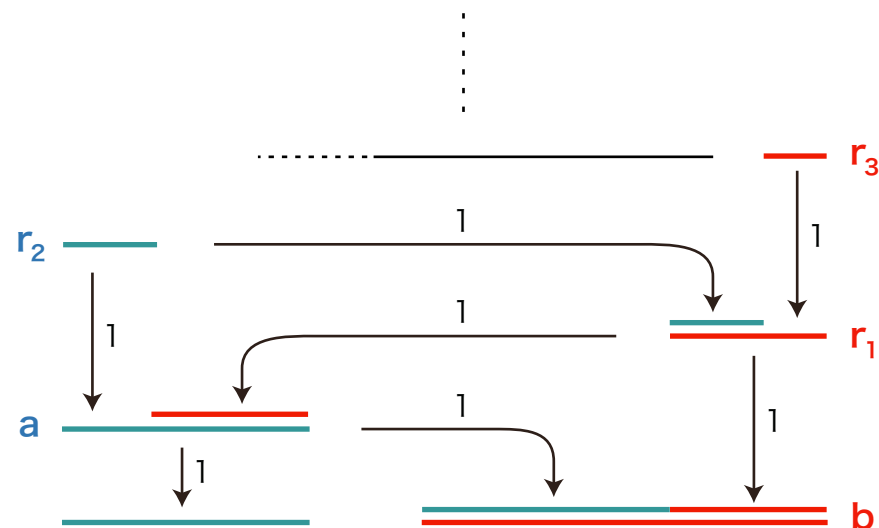
(番号は、推論の順序)

小さい正五角形の中 r_2 と r_1 の位置関係は、もとの正五角形の中の a と b の位置関係と同じである。

よって、ユークリッド互除法の操作は、ここまでのプロセスと同型のプロセスを、延々と続けることになる。



すなわち、つぎのようになる：



そして、比の連分数表現が、つぎのように導かれる：

$$b = a \times 1 + r_1 \Rightarrow \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{r_1}}$$

$$a = r_1 \times 1 + r_2 \Rightarrow \frac{a}{r_1} = 1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$r_1 = r_2 \times 1 + r_3 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

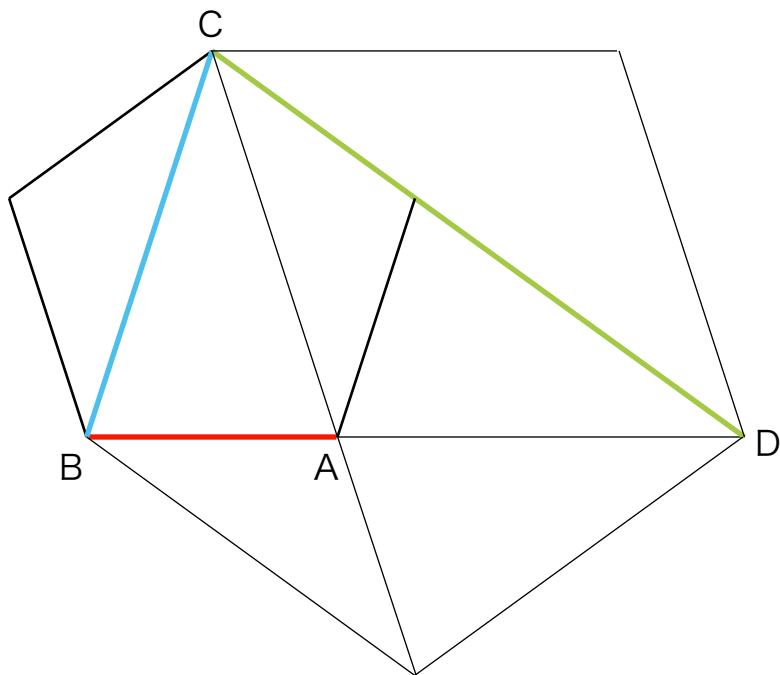
$$r_2 = r_3 \times 1 + r_4 \Rightarrow \frac{r_2}{r_3} = 1 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}}$$

.....

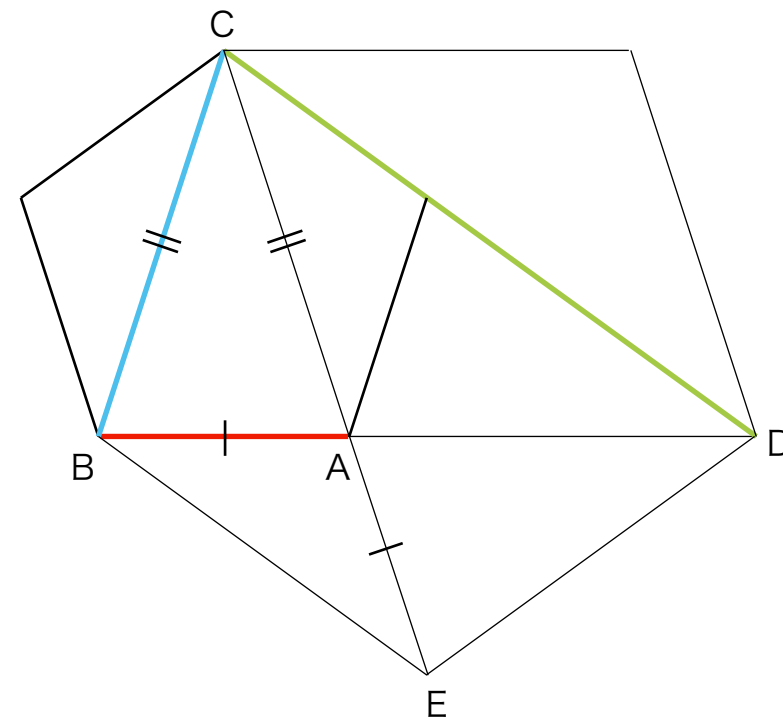
$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

(2) $1 + \phi = \phi^2$

ϕ^2 を作図する——下図の AB に対する CD の比が ϕ^2 である：



この図から、 $1 + \phi = \phi^2$ が導かれる：



実際、 $AB + BC = AE + CA = CE = CD$

(3) 正五角形の作図

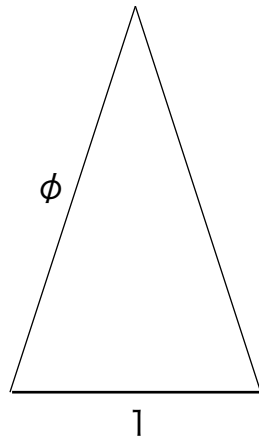
$1 + \phi = \phi^2$ からは、 $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ を得る。

そして $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ を得ることで、正五角形の「コンパスと定木」による作図法を編み出せる。

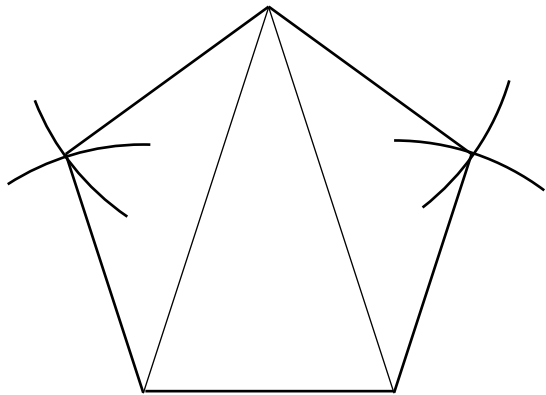
即ち、 $1, \sqrt{5}$ （直角を夾む2辺の長さが1と2の直角三角形の対辺の

1. 黄金比

長さ), $1 + \sqrt{5}$, $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ と順に作図して, つぎの2等辺三角
形をつくる:



そして, これから正五角形ができる:



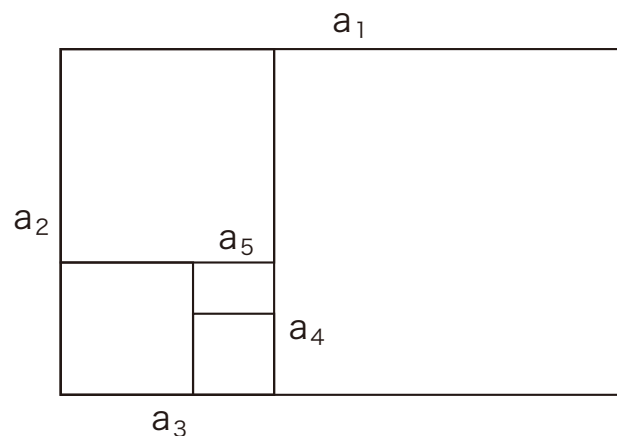
2 フィボナッチ数列

2.1 フィボナッチ数列の意味 (出自)

2.2 フィボナッチ数列の定義

2.1 フィボナッチ数列の意味 (出自)

黄金比の2辺 a_1 , a_2 に対して, ユークリッド互除法を施す:



$$\frac{a_1}{a_2} = 1 + \frac{a_3}{a_2} = 1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}$$

$$\left(\text{同様に } \frac{a_2}{a_3} = 1 + \frac{1}{\frac{a_3}{a_4}} \text{ となって} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a_3}{a_4}}}$$

(この調子で続けていって)

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

これが, $\phi (= (1 + \sqrt{5})/2)$ の連分数展開というわけである。
(「黄金比の意味」)

この連分数表現は, つぎの数列の極限 (収束値) を表現している:

$$1 + \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, \quad \dots$$

翻って, 「この数列の極限」が, ϕ の意味になる。

この数列の各項を計算すると:

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{1}} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3+5}{5} = \frac{8}{5}$$

.....

ここに出てきた 1, 2 (= 1 + 1), 3 (= 1 + 2), 5 (= 2 + 3), 8 (= 3 + 5), …… は, 「フィボナッチ数列」と呼んでいるものである。

2.2 フィボナッチ数列の定義

「フィボナッチ数」の意味を述べることは, 「フィボナッチ数」の出自を述べることである。

そして, 「黄金比」が, 「フィボナッチ数」の出自である (§2.1)。

一方, 「フィボナッチ数」は, 独立に定義 / 定立することができる。

通常見る「フィボナッチ数」のテキストは, この構成をとる。

そしてこの場合は, 「フィボナッチ数の比の極限」として「黄金比」を導くことになる。

ここでは, この構成を確認しておく。

A. フィボナッチ数列

つぎが, フィボナッチ数列の定義である ;

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

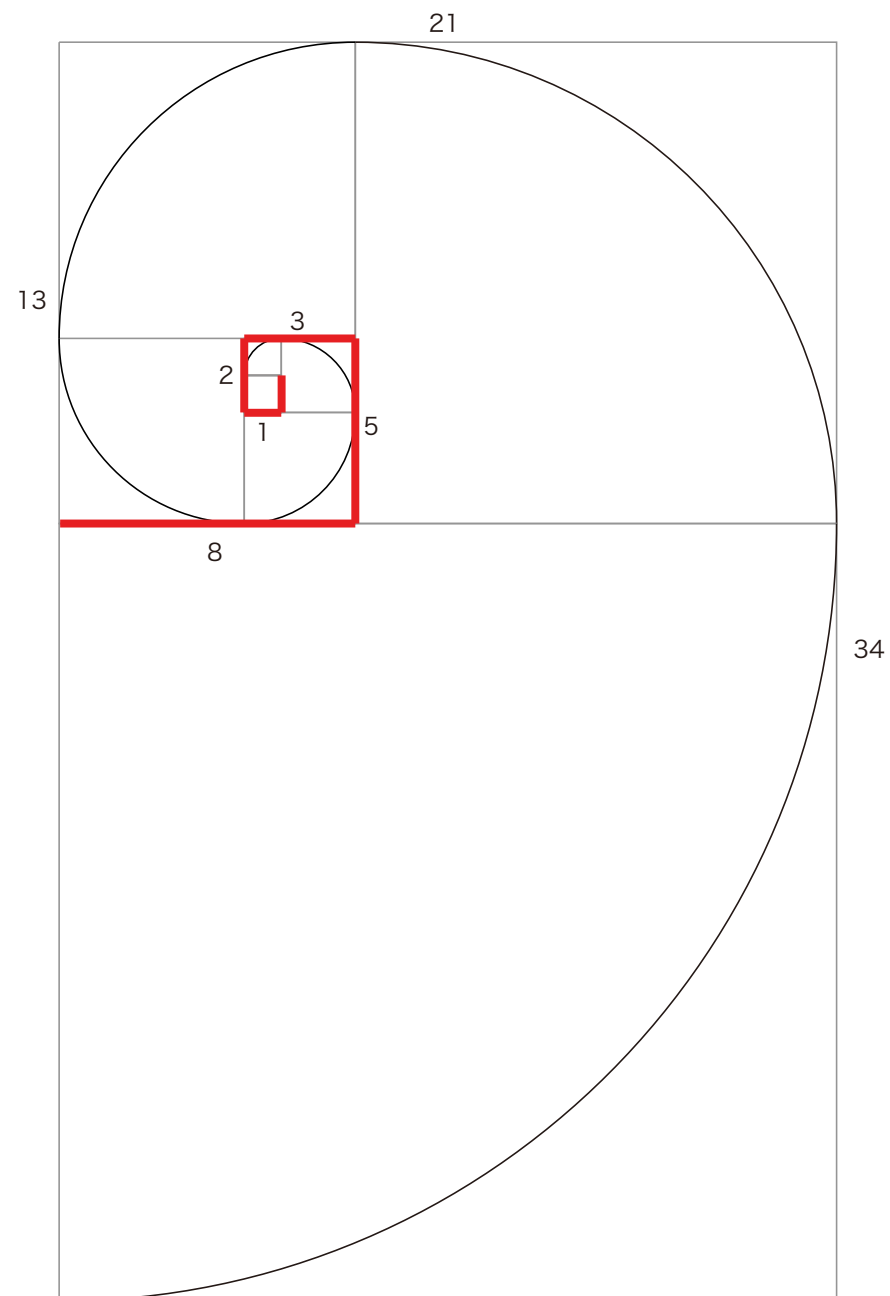
これより, つぎの数列が生成される :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

B. フィボナッチ数列の図形的生成

数は、正方形の辺の長さを表す，

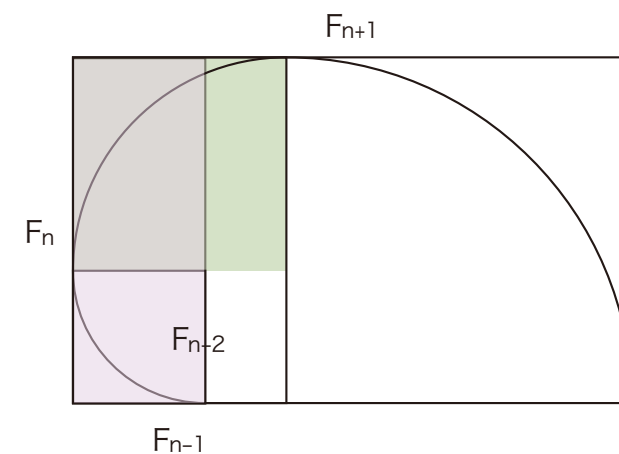
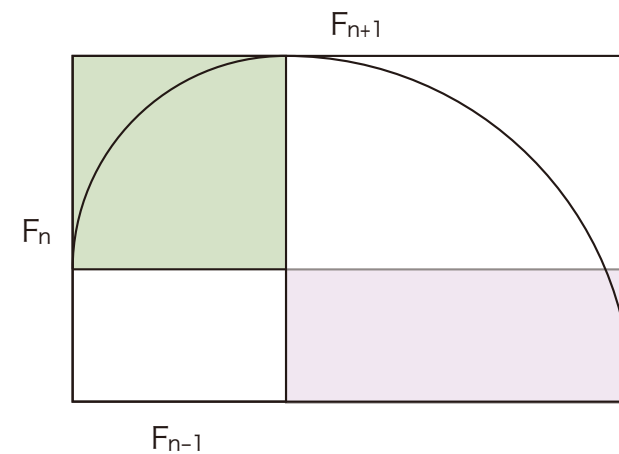
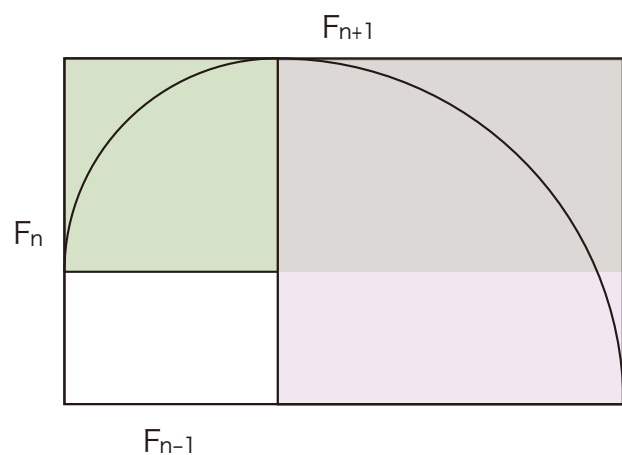
赤線は、四半円の中心からつぎの四半円の中心への移動を表す：



C. 生成される長方形の2辺の比が収束すること

$n \geq 2$ に対し,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} \right| \\
 &= \left| \frac{F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2}{F_n F_{n-1}} \right| \\
 &= \left| \frac{(F_{n-1} + F_n) F_{n-1} - F_n (F_{n-1} + F_{n-2})}{F_n F_{n-1}} \right| \\
 &= \left| \frac{F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2}{F_n F_{n-1}} \right| \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \left| \frac{F_2 F_0 - F_1^2}{F_n F_{n-1}} \right| \\
 &= \frac{1}{F_n F_{n-1}}
 \end{aligned}$$

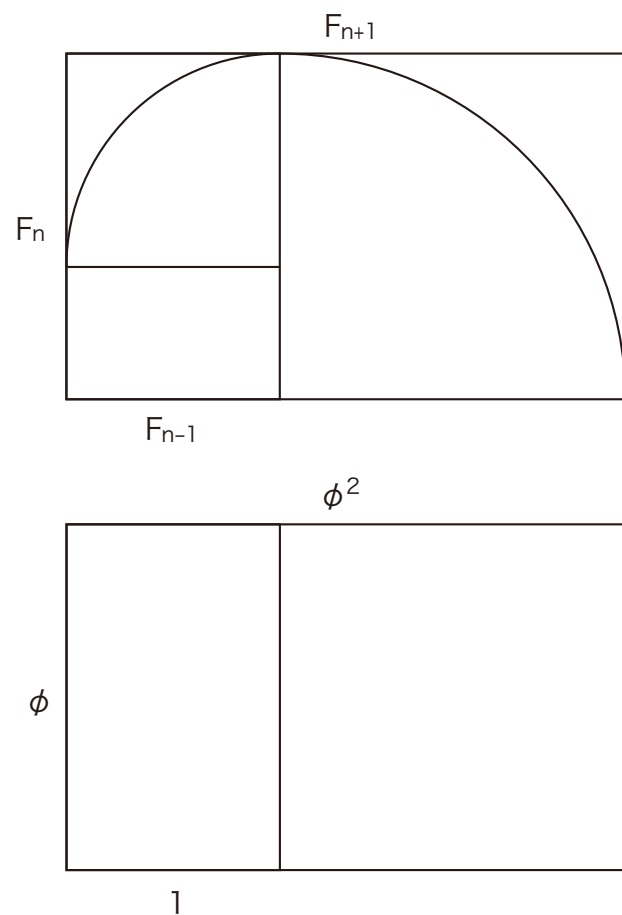


そして, $1/(F_n F_{n-1})$ は0に収束する。

D. 収束値 ϕ が, $1 + \phi = \phi^2$ を満たすこと

$F_n : F_{n+1} : F_{n+2}$ は $1 : \phi : \phi^2$ に収束。

そして, $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ だから, $1 + \phi = \phi^2$ 。



3 黄金角

2.1 黄金角の定義

2.2 フィボナッチ数との関係

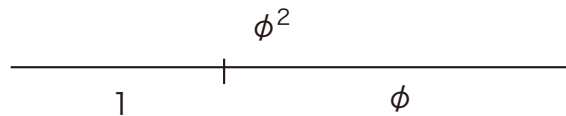
2.3 フラクタル性 (自己相似形の生成)

2.4 黄金角跳び回転

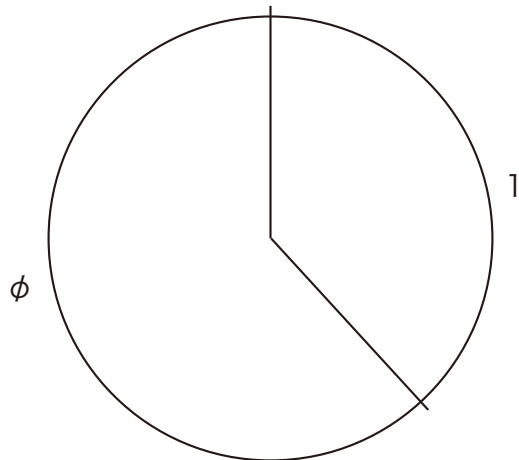
2.5 渦巻きとフィボナッチ数

3.1 黄金角の定義

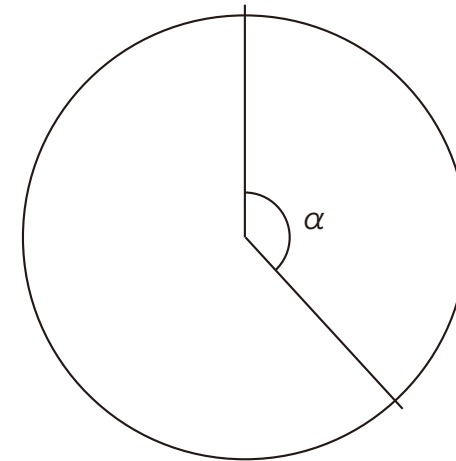
線分をつぎのように内分する比 ϕ が、「黄金比」の名で定立される：



ここで、線分の役割を円周にもたせる：



1 に対応する角の方を、「黄金角」と定義する：



$$\alpha : 360^\circ = 1 : \phi^2, \quad \phi = (1 + \sqrt{5})/2 (= 1.62\cdots) \text{ より,}$$

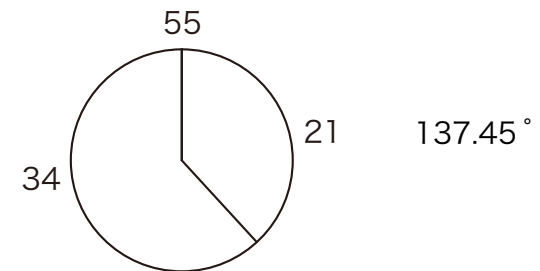
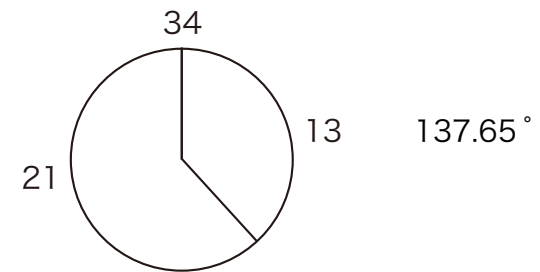
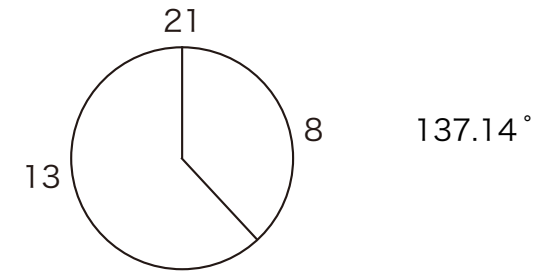
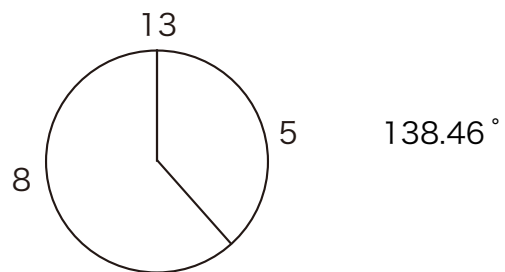
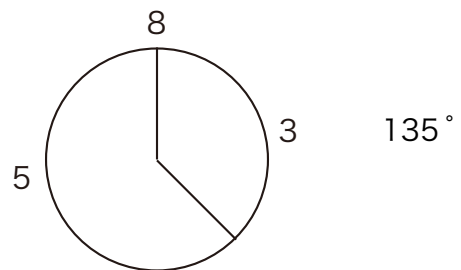
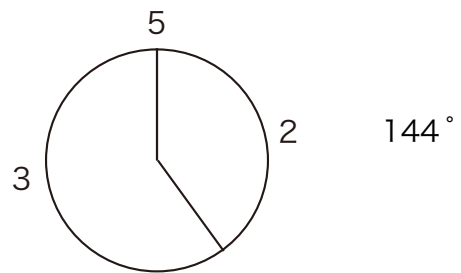
$$\alpha = 137.507\cdots$$

3.2 フィボナッチ数との関係

「黄金角」は、 $< 360^\circ$ の F_n / F_{n+2} の極限である：

実際、 $F_n / F_{n+2} = F_n / (F_n + F_{n+1}) = 1 / (1 + F_{n+1} / F_n)$

そして、この極限は、 $1 / (1 + \phi) = 1 / \phi^2 = \text{黄金角} / 360^\circ$



3.3 フラクタル性 (自己相似形の生成)

黄金角は、線分の黄金比の、円周バージョンである。

そこで、黄金比のフラクタル性 (自己相似形の生成) に対し、この黄金角バージョンを考えることになる。

さて、それはどんなふう？

まず、

$$\begin{aligned}\phi 360^\circ &= \phi(\phi 2\alpha) = \phi(1+\phi)\alpha = \phi\alpha + \phi 2\alpha \\ &= \phi\alpha + 360^\circ\end{aligned}$$

そこで、

$$\begin{aligned}\phi\alpha &= 360^\circ - \alpha \\ \phi^2\alpha &= 360^\circ \\ \phi^3\alpha &= \phi\phi^2\alpha = \phi 360^\circ = \phi\alpha + 360^\circ \\ \phi^4\alpha &= \phi(\phi^3\alpha) = \phi(\phi\alpha + 360^\circ) \\ &= \phi^2\alpha + \phi 360^\circ = 360^\circ + \phi\alpha + 360^\circ \\ &= \phi\alpha + 2 \cdot 360^\circ \\ \phi^5\alpha &= \phi(\phi^4\alpha) = \phi(\phi\alpha + 2 \cdot 360^\circ) \\ &= \phi^2\alpha + 2\phi 360^\circ = 360^\circ + 2(\phi\alpha + 360^\circ) \\ &= 2\phi\alpha + 3 \cdot 360^\circ \\ \phi^6\alpha &= \phi(\phi^5\alpha) = \phi(2\phi\alpha + 3 \cdot 360^\circ) \\ &= 2\phi^2\alpha + 3\phi 360^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 3(\phi\alpha + 360^\circ) \\ &= 3\phi\alpha + 5 \cdot 360^\circ \\ \phi^7\alpha &= \phi(\phi^6\alpha) = \phi(3\phi\alpha + 5 \cdot 360^\circ) \\ &= 3\phi^2\alpha + 5\phi 360^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 5(\phi\alpha + 360^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 5\phi\alpha + 8 \cdot 360^\circ \\ \phi^8\alpha &= \phi(\phi^7\alpha) = \phi(5\phi\alpha + 8 \cdot 360^\circ) \\ &= 5\phi^2\alpha + 8\phi 360^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 8(\phi\alpha + 360^\circ) \\ &= 8\phi\alpha + 13 \cdot 360^\circ\end{aligned}$$

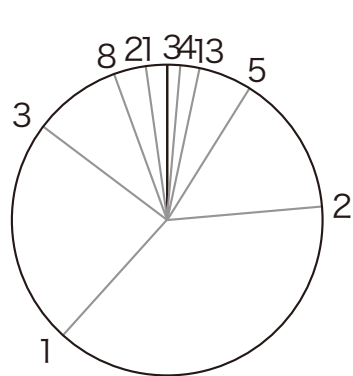
.....

よって、

$$\begin{aligned}\phi\alpha &= 360^\circ - \alpha \equiv -\alpha \pmod{360^\circ} \\ \phi^2\alpha &= 360^\circ \equiv 0 \pmod{360^\circ} \\ \phi^3\alpha &= \phi\alpha + 360^\circ \equiv \phi\alpha \equiv -\alpha \pmod{360^\circ} \\ \phi^4\alpha &= \phi\alpha + 2 \cdot 360^\circ \equiv \phi\alpha \equiv -\alpha \pmod{360^\circ} \\ \phi^5\alpha &= 2\phi\alpha + 3 \cdot 360^\circ \equiv 2\phi\alpha \equiv -2\alpha \pmod{360^\circ} \\ \phi^6\alpha &= 3\phi\alpha + 5 \cdot 360^\circ \equiv 3\phi\alpha \equiv -3\alpha \pmod{360^\circ} \\ \phi^7\alpha &= 5\phi\alpha + 8 \cdot 360^\circ \equiv 5\phi\alpha \equiv -5\alpha \pmod{360^\circ} \\ \phi^8\alpha &= 8\phi\alpha + 13 \cdot 360^\circ \equiv 8\phi\alpha \equiv -8\alpha \pmod{360^\circ} \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

こうして、黄金比のフラクタル性の黄金角バージョンは、つぎのようになる：

《角度 $-\alpha$ を単位にして、円周上でフィボナッチ数跳びをする》



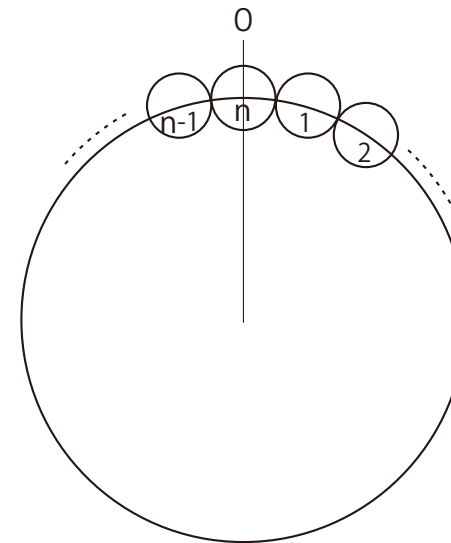
1 : 138°
 2 : 275°
 3 : 53°
 5 : 328°
 8 : 20°
 13 : 348°
 21 : 8°
 34 : 355°
 55 : 3°
 89 : 358°

上図に示されるように、 $0^\circ \pmod{360^\circ}$ への収束プロセスが、黄金角のフラクタル性ということになるわけである。

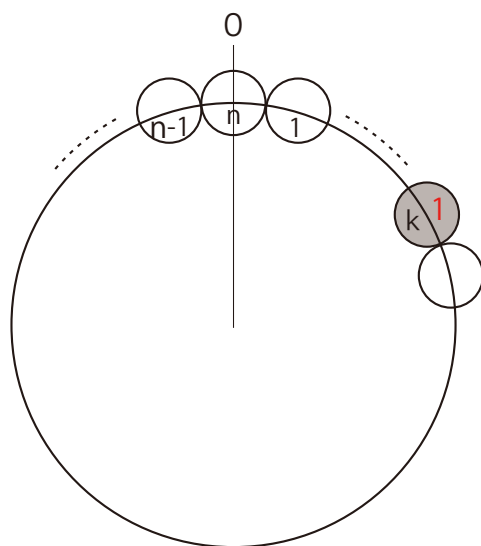
3.4 黄金角跳び回転

つぎの問題を考える：

1. 円周に、要素 n 個をきっちり並べる。

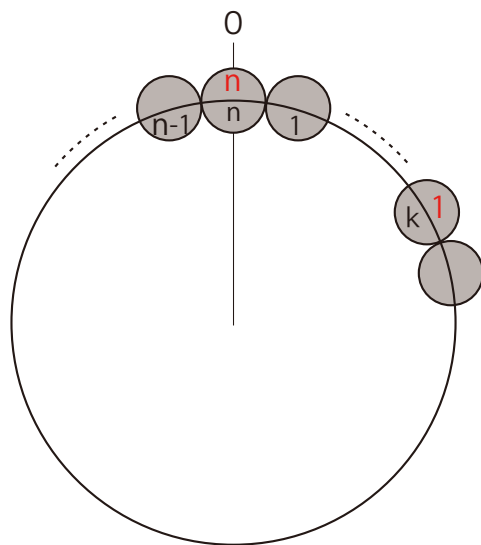


2. 配置の方法は、「0からスタートして、 k 跳びで要素を置いていく」。



3. さらに、「 k 跳びを n 回やったとき、要素 n 個の配置がちょうど成っている」が条件。

——特に、以上の要件より、0の位置に $<n$ 回目> がくる (註1)。

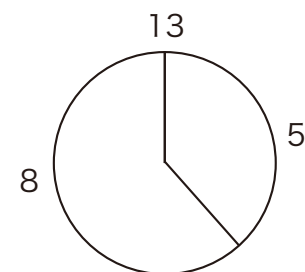
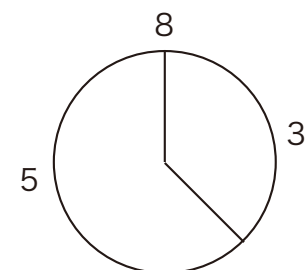
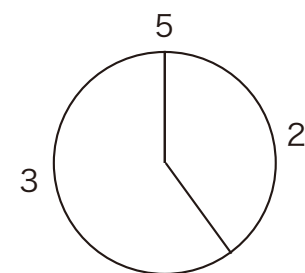


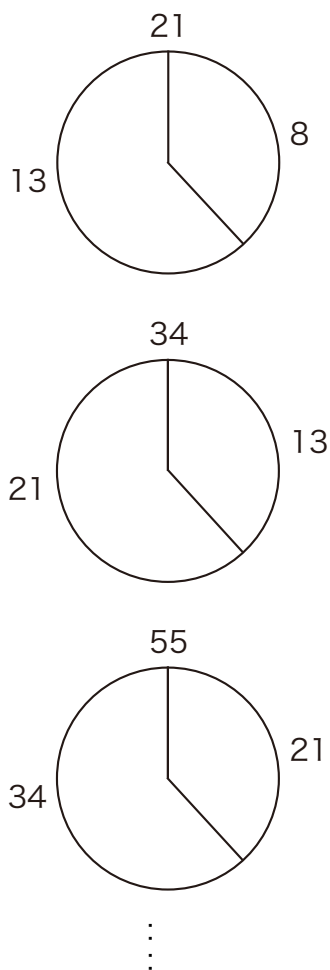
勝手に選んだ n , k では、こうはならない。

一方これが成り立つような n , k は、格別なものでもない。

即ち、互いに素な2つの数であればよい (註2)。

フィボナッチ数列だと、 F_{n+2} と F_n が互いに素 (註3) であるから、(5, 2), (8, 3), (13, 5), (21, 8), (34, 13), (55, 21) …… の組で、成り立つ。





上図で、小さい数の側の角は、この極限が黄金角であり、それ自身も黄金角に近い。

そこで、開始点Oから黄金角 i 回転に対応する円周上の点に数 i を置いていくとき、つぎのことが成り立つ：

- ・各フィボナッチ数 n (= 5, 8, 13, 21, 34, 55, …) に対し、黄金角の n 回の回転で、円周に n 個がほぼ等間隔に並ぶ。

- ・開始点Oの付近に、フィボナッチ数が並ぶ (註 4)。
- ・異なる2数の位置は、重ならない (註 5)。

註1： n より小さい i で i 回目にOの位置にきたときは、 $(i + 1)$ 回目が1回目と重なる。

註2： n より小さい $i < j$ で、 k 跳び i 回と j 回が重なるとする。
即ち、 $k \times (j - i) = n \times p$ となる整数 p が存在するとする。
 k と n が互いに素であれば、 k は p の因子。
そしてこのときは $j - i > n$ になり、矛盾。

註3： $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ より、 F_{n+2} と F_n が p を共通因子とするとき、 F_{n+1} も p を因子にする。
これは、「5, 2, 3 は p を共通因子とする」に溯行し、矛盾。

註4： ちなみに、位置はつぎのようになる：

5 : 左 32.5°
8 : 右 20.1°
13 : 左 12.4°
21 : 右 7.7°
34 : 左 4.7°
55 : 右 2.9°
89 : 左 1.8°

註5： 重なるとは、黄金角のある整数倍が 360° の整数倍になる

こと。これは、黄金角と 360° の比 $1/\phi^2 = 1/(1+\phi)$ が有理数だということ、特に ϕ が有理数だということ。

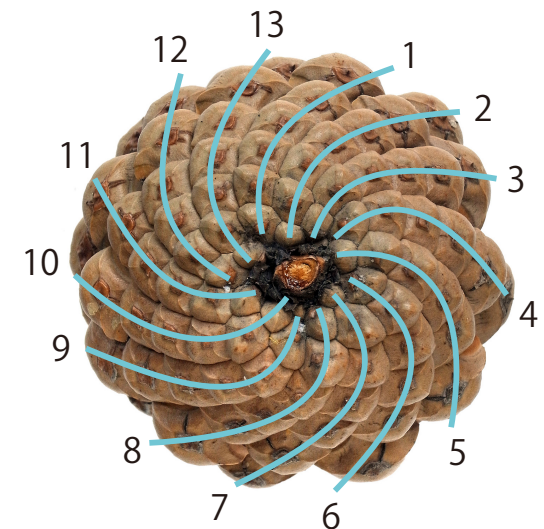
一方、 ϕ の連分数表現が直接証明になるように、 ϕ は無理数。

3.5 渦巻きとフィボナッチ数

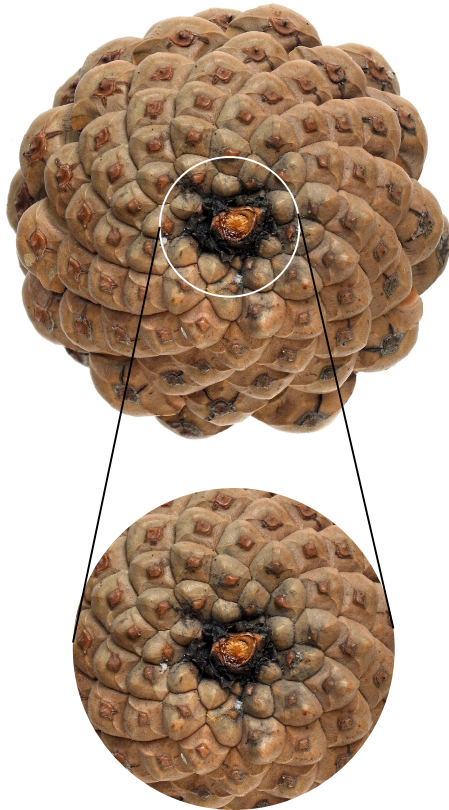
つぎは、松ぼっくりの下から見た画像である：



渦巻きが見えてくるので、その数を数えると、13。
フィボナッチ数の一つである。



また、(少し無理しつつも) つぎのような感じで、フラクタル構造を見ることができる：



これを一例に、植物の形態形成では、フィボナッチ数を現すフラクタル性がいろいろ見出される(らしい)。

そこで、「これはどうしたことか?」「フィボナッチ数にどんな秘密が?」となるわけである。

しかしこの話題では、「秘密」はフィボナッチ数ではなく、黄金角に

あるとしなければならない。

実際、渦巻きなら、任意本数で描くことができる。

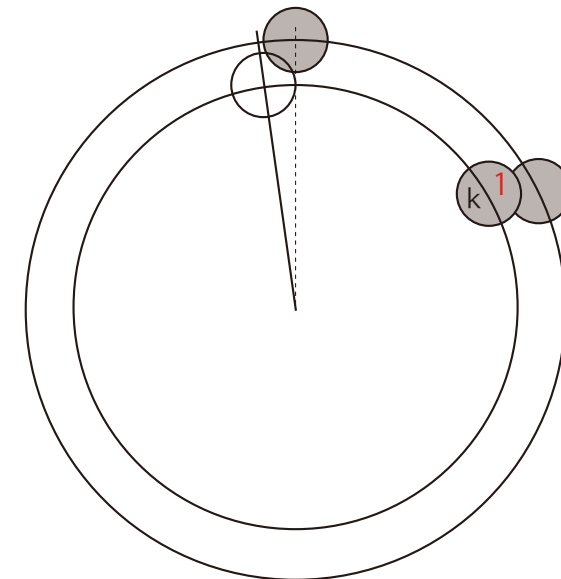
「黄金角跳び回転」 (§3.4) に出てきた「 k 跳びで n 個一巡」も、「 n と k が互いに素」が条件になることであって、フィボナッチ数に理由を求めることではない。

つぎが「植物の形態形成とフィボナッチ数」の考え方になる：

《黄金角の回転が先ずあり、これに「円形に配列する要素の大きさ」の制約が加わって、「 k 跳びで n 個一巡」の n がフィボナッチ数になる。》

黄金角の回転では、「 k 跳びで n 個一巡」の $<n$ 番目> が回転の開始点にきて、かつ開始点と少しずれる。

そこで、<一段下げた円で同じプロセスを再開>をフラクタル構造にすると、渦巻き模様が現れる。



また、この場合は、新しい配置が先の配置との隙間を埋めるふうになる
ので、密度の高いパックの実現になる。

こうして、＜松ぼっくりを下から見た画像＞のようになる。

付録：ユークリッドの互除法

A1 ユークリッドの互除法

A2 例： $\sqrt{2}$ の連分数表現

A1 ユークリッドの互除法

整数比の2数は，試行錯誤的に物を操作して求めるしかないように，一見思われる。

しかしそうではない。

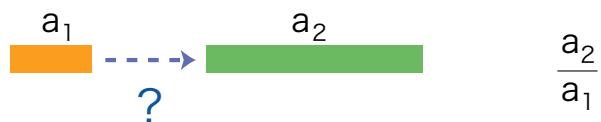
整数比を求める手順がある。

言い換えると，分数を値とするきちんとした測定法がある。

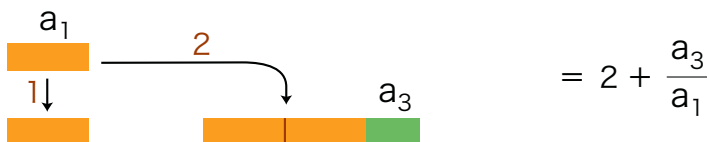
それが，「ユークリッドの互除法」である。

以下に，この操作と，この操作の連分数表現を，並べて示す：

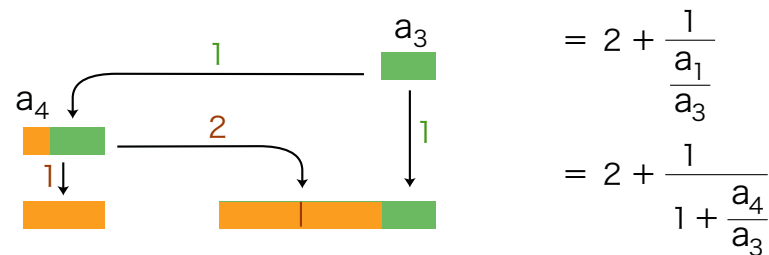
(1) 分数で何倍か？



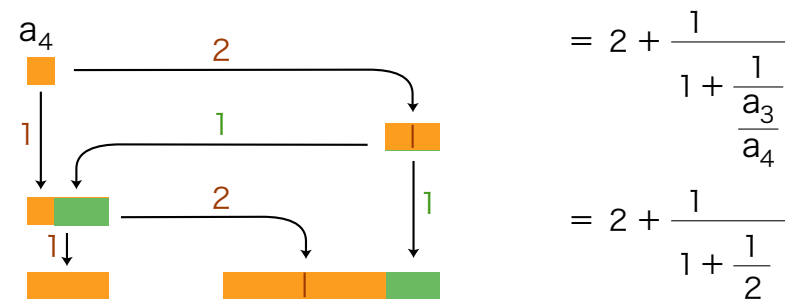
(2) a1 が a2 にいくつ入るか？——2つ入って余り a3 がでる。



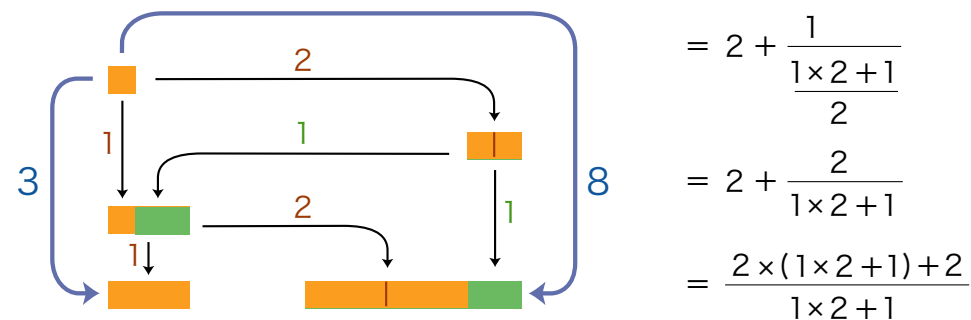
(3) a3 が a1 にいくつ入るか——1つ入って余り a4 がでる。



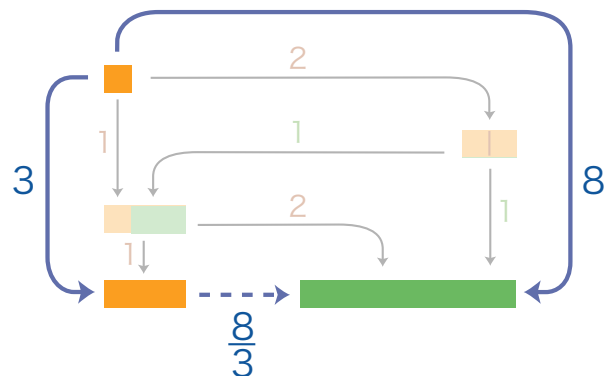
(4) a4 が a3 にいくつ入るか——2つ入って余りなし。



(5) 最後の余り a4 が最初の a1, a2 にそれぞれいくつ入るかが，計算で求められる——3と8：



(6) 求める分数倍は $8/3$ 。



ユークリッドの互除法を使うと、つぎの両方が同時に得られる：

- ・二量の共約量（しかも最大共約量）
- ・分数の値（しかも既約分数）

例： $\sqrt{2}$ の連分数表現

黄金比 ($= (1 + \sqrt{5})/2$) は、つぎの連分数である：

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

そこで、これの延長として、「つぎの連分数はどうなるのだろうか？」となりそうである：

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

結論から言うと、これは $1 + \sqrt{2}$ になる。

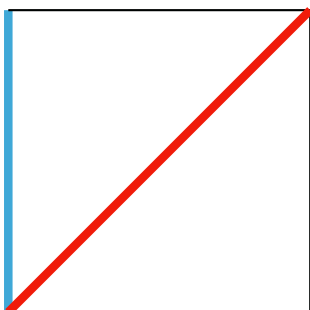
以下に解説するが、 $\sqrt{2}$ の連分数表現がつぎのようになる：

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

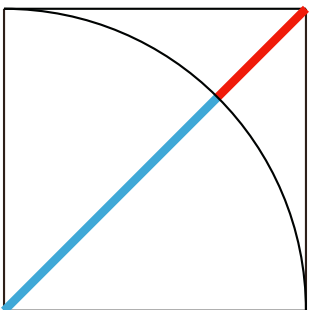
そしてこれに 1 を足せば、先の連分数になるわけである。

$\sqrt{2}$ の連分数表現は、ユークリッド互除法をつぎのように行うことで得られる：

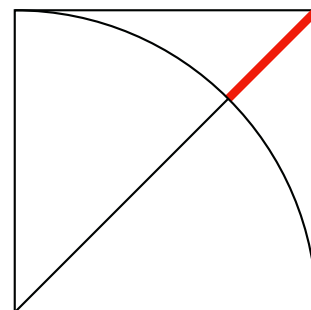
1. 正方形で、辺が対角線にいくつ入り、そしてそのときの余りは？



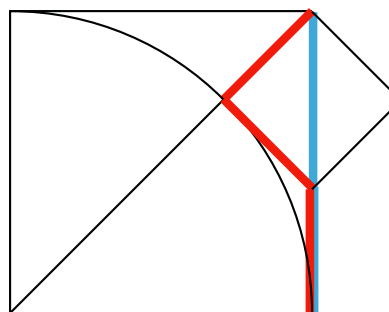
2. 1つ入って、余りが出る：



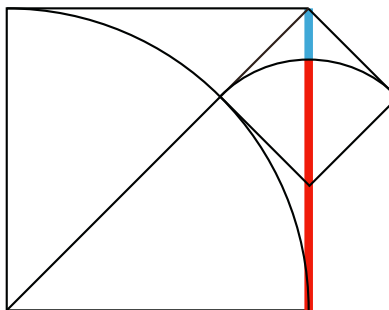
3. 余りは、もとの辺にいくつ入り、そしてそのときの余りは？



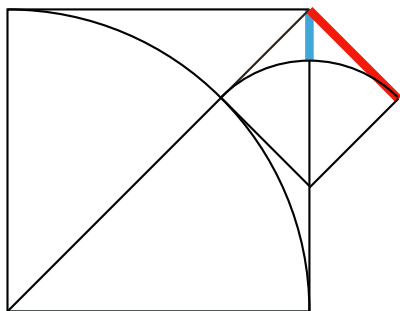
4. 余りと同じ長さの線分が、つぎのようにとれる：



5. つぎのようにして、2つ入って、余りが出る：

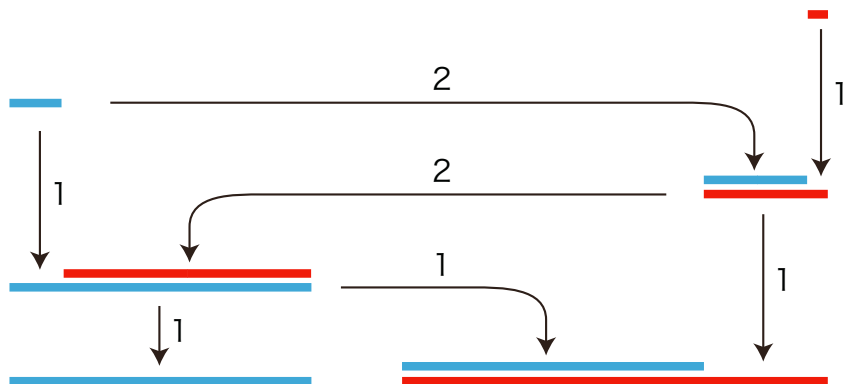


6. この余りは、もとの余りにいくつ入り、そしてそのときの余りは？



これは、3 と同じ形になっている。

よって、この「ユークリッドの互除法」は永遠に続く。



よって、 $\sqrt{2}$ の連分数表現として、つぎを得る：

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

おわりに

わたしは、数学が「美しい」とか「不思議」「意味深」で語られるのは、あまり好きではない。

数学教育学を専門にする身であるが、数学の勉強が「楽しい」で語られるのも、好きではない。

数学を、サバサバしたもののように思っていたいからである。

「黄金比」は、「美しい」「不思議」「意味深」で語られる数学主題の代表格である。

本テキストは、「黄金比」を「どうってことないもの」として解説できることを、最終目標にしている。

実際、「いちばんシンプルな無理数（非整数比）」が、「黄金比」の意味である：

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

「いちばんシンプル」だから、含蓄もシンプルである。

$1 + \phi = \phi^2$ はシンプルな極みである。——と、ここでは思ってみよう。

「シンプル」を「意味深」と取り違えないようにしよう、ということである。

このことは、特に「黄金角」に対し強調できるようになればと思う。

「生物の形態形成に黄金角が現れるのは不思議だとしても、黄金角の数学自体はどうってことないものである——シンプルな極みである」とい

うふうに論を進められないか……

実際、シンプルだから生物の形態形成に現れてくるのだろう。——と、思ってみよう。

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年, 北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て, 現在, 北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

註: 本論考は, つぎのサイトで継続される (この進行に応じて本書を適宜更新する) :

http://m-ac.jp/me/subjects/geometry/golden_ratio/

フィボナッチ数・黄金比・黄金角

2014-07-22 初版アップロード (サーバー : m-ac.jp)

著者・サーバ運営者 宮下英明

サーバ m-ac.jp

<http://m-ac.jp/>
m@m-ac.jp
